

МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

С. В. ЗЛОБИНА
Л. Н. ПОСИЦЕЛЬСКАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

*Рекомендовано Научно-методическим советом
по математике Министерства образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов педагогических вузов, обучающихся
по физико-математическим специальностям*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.1+517.2+517.3
ББК 22.161
368

Злобина С.В., Посицельская Л.Н. **Математический анализ в задачах и упражнениях.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 360 с. — ISBN 978-5-9221-1146-1.

Пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания математического анализа в вузах и охватывает все разделы дифференциального и интегрального исчисления функций одной действительной переменной. По каждой теме даны краткие теоретические сведения и упражнения, решения задач, задачи для самостоятельной работы и задания для контрольных работ.

Пособие предназначено студентам высших и средних специальных учебных заведений. Будет полезно также учителям математики, ученикам профильных физико-математических классов и школьникам, интересующимся математикой.

Учебное издание

ЗЛОБИНА Светлана Васильевна
ПОСИЦЕЛЬСКАЯ Любовь Наумовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Редактор *О.В. Максимова*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 30.07.09. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,5. Уч.-изд. л. 23. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ГУП
«ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1146-1



9 785922 111461

ISBN 978-5-9221-1146-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© С. В. Злобина, Л. Н. Посицельская, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	12

I. Введение в математический анализ

Глава 1. Числовые множества и функции на них	15
1. Числовые множества	15
1.1. Основные понятия и теоремы.	15
1.2. Теоретические упражнения.	16
1.3. Примеры решения задач.	16
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	17
2. Метод математической индукции.	17
2.1. Основные понятия и теоремы.	17
2.2. Примеры решения задач.	18
2.3. Задачи для самостоятельной работы.	20
3. Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грани	20
3.1. Основные понятия и теоремы.	20
3.2. Теоретические упражнения.	22
3.3. Примеры решения задач.	22
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	24
4. Функция действительной переменной	24
4.1. Основные понятия и теоремы.	24
4.2. Теоретические упражнения.	26
4.3. Примеры решения задач.	26
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	27
5. Четные и нечетные функции. Монотонные функции	28
5.1. Основные понятия и теоремы.	28
5.2. Теоретические упражнения	29
5.3. Примеры решения задач.	30
5.4. Задачи для самостоятельной работы.	32

6. Ограниченные функции.	32
6.1. Основные понятия и теоремы.	32
6.2. Теоретические упражнения.	33
6.3. Примеры решения задач.	33
6.4. Задачи для самостоятельной работы.	34
7. Периодические функции	35
7.1. Основные понятия и теоремы.	35
7.2. Теоретические упражнения.	35
7.3. Примеры решения задач.	36
7.4. Задачи для самостоятельной работы.	38
8. Сложная функция. Обратная функция.	38
8.1. Основные понятия и теоремы.	38
8.2. Теоретические упражнения.	39
8.3. Примеры решения задач.	40
8.4. Задачи для самостоятельной работы.	41
 Глава 2. Предел последовательности	 42
1. Понятие последовательности. Ограниченные, монотонные последовательности.	42
1.1. Основные понятия и теоремы.	42
1.2. Теоретические упражнения.	43
1.3. Примеры решения задач.	44
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	45
2. Предел последовательности.	46
2.1. Основные понятия и теоремы.	46
2.2. Теоретические упражнения.	47
2.3. Примеры решения задач.	47
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	50
3. Переход к пределу в неравенствах.	50
3.1. Основные понятия и теоремы.	50
3.2. Теоретические упражнения.	51
3.3. Примеры решения задач.	51
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	53
4. Бесконечно малые последовательности	53
4.1. Основные понятия и теоремы.	53
4.2. Теоретические упражнения.	54
4.3. Примеры решения задач.	54
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	55
5. Бесконечно большие последовательности.	55
5.1. Основные понятия и теоремы.	55
5.2. Теоретические упражнения.	56
5.3. Примеры решения задач.	57
5.4. Задачи для самостоятельной работы.	59

6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями	59
6.1. Основные понятия и теоремы.	59
6.2. Теоретические упражнения.	60
6.3. Примеры решения задач.	60
6.4. Задачи для самостоятельной работы.	62
7. Подпоследовательность. Частичный предел	63
7.1. Основные понятия и теоремы.	63
7.2. Теоретические упражнения.	64
7.3. Примеры решения задач.	65
7.4. Задачи для самостоятельной работы.	66
8. Предел монотонной последовательности. Число ϵ	66
8.1. Основные понятия и теоремы.	66
8.2. Теоретические упражнения.	67
8.3. Примеры решения задач.	67
8.4. Задачи для самостоятельной работы.	70
9. Критерий Коши.	70
9.1. Основные понятия и теоремы.	70
9.2. Теоретические упражнения.	71
9.3. Примеры решения задач.	71
9.4. Задачи для самостоятельной работы.	73
 Глава 3. Предел и непрерывность функции	 74
1. Понятие предела функции (по Коши).	74
1.1. Основные понятия и теоремы.	74
1.2. Теоретические упражнения.	76
1.3. Примеры решения задач.	76
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	80
2. Переход к пределу в неравенствах.	81
2.1. Основные понятия и теоремы.	81
2.2. Теоретические упражнения.	81
2.3. Примеры решения задач.	82
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	84
3. Бесконечно малые функции.	84
3.1. Основные понятия и теоремы.	84
3.2. Теоретические упражнения.	85
3.3. Примеры решения задач.	86
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	89
4. Арифметические операции над пределами. Первый замечательный предел.	90
4.1. Основные понятия и теоремы.	90
4.2. Теоретические упражнения.	90
4.3. Примеры решения задач.	91
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	94

5. Непрерывность функции в точке	95
5.1. Основные понятия и теоремы.	95
5.2. Теоретические упражнения.	95
5.3. Примеры решения задач.	96
5.4. Задачи для самостоятельной работы.	97
6. Односторонние пределы и непрерывность. Пределы монотонных функций	98
6.1. Основные понятия и теоремы.	98
6.2. Теоретические упражнения.	99
6.3. Примеры решения задач.	99
6.4. Задачи для самостоятельной работы.	101
7. Бесконечно большие функции	102
7.1. Основные понятия и теоремы.	102
7.2. Теоретические упражнения.	104
7.3. Примеры решения задач.	104
7.4. Задачи для самостоятельной работы.	105
8. Пределы по последовательностям (по Гейне). Второй замечательный предел.	106
8.1. Основные понятия и теоремы.	106
8.2. Теоретические упражнения.	107
8.3. Примеры решения задач.	108
8.4. Задачи для самостоятельной работы.	111
9. Предел и непрерывность сложной функции	112
9.1. Основные понятия и теоремы.	112
9.2. Теоретические упражнения.	113
9.3. Примеры решения задач.	113
9.4. Задачи для самостоятельной работы.	118
10. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые	119
10.1. Основные понятия и теоремы.	119
10.2. Теоретические упражнения.	121
10.3. Примеры решения задач.	121
10.4. Задачи для самостоятельной работы.	125
11. Точки разрыва. Асимптоты	126
11.1. Основные понятия и теоремы.	126
11.2. Теоретические упражнения.	127
11.3. Примеры решения задач.	128
11.4. Задачи для самостоятельной работы.	132
12. Свойства функций, непрерывных на промежутках	133
12.1. Основные понятия и теоремы.	133
12.2. Теоретические упражнения.	134
12.3. Примеры решения задач.	134
12.4. Задачи для самостоятельной работы.	136

Ответы и указания	137
1. Числовые множества и функции на них.	137
2. Предел последовательности	137
3. Предел и непрерывность функции	138
 Приложение. Варианты контрольных работ	139
1. Контрольная работа по теме «Предел последовательности»	139
2. Контрольная работа по теме «Предел и непрерывность функции»	141

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 1. Производная и дифференциал	149
1. Понятие производной	149
1.1. Основные понятия и теоремы.	149
1.2. Теоретические упражнения.	150
1.3. Примеры решения задач.	150
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	153
2. Правила вычисления производной. Таблица производных	154
2.1. Основные понятия и теоремы.	154
2.2. Теоретические упражнения.	156
2.3. Примеры решения задач.	156
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	161
3. Односторонние производные	162
3.1. Основные понятия и теоремы.	162
3.2. Теоретические упражнения.	162
3.3. Примеры решения задач.	162
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	166
4. Геометрический смысл производной.	166
4.1. Основные понятия и теоремы.	166
4.2. Теоретические упражнения.	167
4.3. Примеры решения задач.	168
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	170
5. Производные высших порядков.	171
5.1. Основные понятия и теоремы.	171
5.2. Теоретические упражнения.	172
5.3. Примеры решения задач.	173
5.4. Задачи для самостоятельной работы.	176

6. Производные функции, заданной параметрически	176
6.1. Основные понятия и теоремы.	176
6.2. Теоретические упражнения.	177
6.3. Примеры решения задач.	178
6.4. Задачи для самостоятельной работы.	179
7. Дифференциал функции	179
7.1. Основные понятия и теоремы.	179
7.2. Теоретические упражнения.	181
7.3. Примеры решения задач.	181
7.4. Задачи для самостоятельной работы.	183
 Глава 2. Свойства дифференцируемых функций	 184
1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях	184
1.1. Основные понятия и теоремы.	184
1.2. Теоретические упражнения.	185
1.3. Примеры решения задач.	186
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	188
2. Правило Лопиталья	189
2.1. Основные понятия и теоремы.	189
2.2. Теоретические упражнения.	190
2.3. Примеры решения задач.	191
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	196
3. Формула Тейлора	196
3.1. Основные понятия и теоремы.	196
3.2. Теоретические упражнения.	198
3.3. Примеры решения задач.	199
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	208
 Глава 3. Исследование функций	 210
1. Монотонность функции.	210
1.1. Основные понятия и теоремы.	210
1.2. Теоретические упражнения.	210
1.3. Примеры решения задач.	211
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	215
2. Экстремумы функции	216
2.1. Основные понятия и теоремы.	216
2.2. Теоретические упражнения.	217
2.3. Примеры решения задач.	218
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	221
3. Выпуклость и точки перегиба	221
3.1. Основные понятия и теоремы.	221
3.2. Теоретические упражнения.	223
3.3. Примеры решения задач.	223

3.4. Задачи для самостоятельной работы.	227
4. Наибольшее и наименьшее значения функции	227
4.1. Основные понятия и теоремы.	227
4.2. Теоретические упражнения.	229
4.3. Примеры решения задач.	229
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	233
5. Построение графиков функций	233
5.1. Схема исследования функции.	233
5.2. Примеры решения задач.	234
5.3. Задачи для самостоятельной работы.	241
Ответы и указания	242
1. Производная и дифференциал	242
2. Свойства дифференцируемых функций.	243
3. Исследование функций	244
Приложение. Варианты контрольных работ	246

III. Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава 1. Неопределенный интеграл	253
1. Первообразная и неопределенный интеграл	253
1.1. Основные понятия и теоремы.	253
1.2. Теоретические упражнения.	255
1.3. Примеры решения задач.	256
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	260
2. Интегрирование заменой переменной.	260
2.1. Основные понятия и теоремы.	260
2.2. Теоретические упражнения.	261
2.3. Примеры решения задач.	262
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	276
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.	277
3.1. Основные понятия и теоремы.	277
3.2. Теоретические упражнения.	278
3.3. Примеры решения задач.	278
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	283

Глава 2. Определенный интеграл	284
1. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница	284
1.1. Основные понятия и теоремы.	284
1.2. Теоретические упражнения.	286
1.3. Примеры решения задач.	287
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	289
2. Замена переменной в определенном интеграле	290
2.1. Основные понятия и теоремы.	290
2.2. Теоретические упражнения.	290
2.3. Примеры решения задач.	291
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	295
3. Интегрирование по частям в определенном интеграле	296
3.1. Основные понятия и теоремы.	296
3.2. Теоретические упражнения.	296
3.3. Примеры решения задач.	297
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	299
Глава 3. Приложения определенного интеграла	301
1. Площадь плоской фигуры	301
1.1. Основные понятия и теоремы.	301
1.2. Теоретические упражнения.	302
1.3. Примеры решения задач.	302
1.4. Задачи для самостоятельной работы.	305
2. Объем тела	306
2.1. Основные понятия и теоремы.	306
2.2. Теоретические упражнения.	307
2.3. Примеры решения задач.	307
2.4. Задачи для самостоятельной работы.	310
3. Длина кривой	310
3.1. Основные понятия и теоремы.	310
3.2. Теоретические упражнения.	312
3.3. Примеры решения задач.	312
3.4. Задачи для самостоятельной работы.	314
4. Площадь поверхности вращения	315
4.1. Основные понятия и теоремы.	315
4.2. Теоретические упражнения.	316
4.3. Примеры решения задач.	316
4.4. Задачи для самостоятельной работы.	320
Глава 4. Несобственные интегралы	321
1. Несобственный интеграл и его свойства	321

1.1.	Основные понятия и теоремы.	321
1.2.	Теоретические упражнения.	324
1.3.	Примеры решения задач.	325
1.4.	Задачи для самостоятельной работы.	330
2.	Исследование сходимости несобственных интегралов.	330
2.1.	Основные понятия и теоремы.	330
2.2.	Теоретические упражнения.	332
2.3.	Примеры решения задач.	332
2.4.	Задачи для самостоятельной работы.	337
3.	Несобственные интегралы с несколькими особенностями.	337
3.1.	Основные понятия и теоремы.	337
3.2.	Теоретические упражнения.	338
3.3.	Примеры решения задач.	339
3.4.	Задачи для самостоятельной работы.	341
Ответы и указания		342
1.	Неопределенный интеграл	342
2.	Определенный интеграл.	345
3.	Приложения определенного интеграла	347
4.	Несобственные интегралы	350
Приложение. Варианты контрольных работ		351
1.	Контрольная работа по теме: «Неопределенный интеграл»	351
2.	Контрольная работа по разделу: «Интегральное исчисление функций одной переменной»	352
Список литературы		360

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса физико-математических специальностей высших учебных заведений. Оно включает три важнейших раздела анализа: введение в математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Данные разделы являются базовыми как для математического анализа, так и для изучения других математических дисциплин фундаментального и прикладного характера, а также теоретической механики и физики. Цель пособия — помочь студентам преодолеть трудности, возникающие у начинающих изучать данную дисциплину, познакомиться с основными понятиями и методами анализа, приобрести устойчивые базовые знания.

Пособие состоит из трех частей, каждая из которых разбита на главы и параграфы. Первая часть включает 3 главы: «Числовые множества и функции на них», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции». Ее центром является фундаментальное для математического анализа понятие предела, освоение которого на начальном этапе сопряжено с немалыми трудностями. В пособии дается универсальное определение предела, основанное на обобщенном понятии окрестности. Это позволяет параллельно изучать все виды пределов функции (пределы в точке, односторонние пределы, пределы на бесконечности). Вторая часть содержит главы «Производная и дифференциал», «Свойства дифференцируемых функций» и «Исследование функций», а третья — главы «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Приложения определенного интеграла», «Несобственные интегралы».

Главы каждой части разбиты на параграфы, объем учебного материала в каждом из которых соответствует одному практическому занятию. Параграф состоит из нескольких пунктов, включающих краткие теоретические сведения (основные определения, важнейшие теоремы), необходимые для решения задач; подробно разобранные примеры, демонстрирующие применение основных теорем, методов, формул; задачи для самостоятельного решения. Особое внимание уделяется примерам решения вычислительных задач, вызывающих наибольшие затруднения у студентов; они подобраны по принципу нарастающей сложности и каждая из них демонстрирует определенный метод или технический прием. В приложении приведены задания для контрольных работ.

Часть I

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**

Глава 1

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ НА НИХ

1. Числовые множества

1.1. Основные понятия и теоремы. Основные числовые множества: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Говорят, что существует *взаимно однозначное отображение* множества A на множество B , если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие единственный элемент множества B и при этом каждый элемент множества B оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества A .

Геометрически множество действительных чисел изображается в виде числовой прямой, а числа — в виде точек этой прямой.

Промежутками называются следующие подмножества множества $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ — *отрезок*;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — *интервал*;

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ — *полуинтервалы*;

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$,

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$,

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ — *полупрямые, или лучи*;

$(a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ — *δ -окрестность точки a ($\delta > 0$)*.

Модулем, или абсолютной величиной действительного числа a называется действительное число, обозначаемое $|a|$ и определяемое по формуле

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y числовой прямой вычисляется по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$.

Свойства модуля.

1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$1) \quad |a| \geq 0; \quad 2) \quad |a| = |-a|; \quad 3) \quad -|a| \leq a \leq |a|.$$

2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства:

$$1) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \text{ — неравенство треугольника;} \\ 2) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

1.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$1) \quad |ab| = |a||b|; \quad 2) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ при } b \neq 0; \\ 3) \quad |a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

2). Докажите: если $\varepsilon > 0$, то неравенства $|x| \leq \varepsilon$ и $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ равносильны.

3). Докажите, что $\sqrt{a^2} = |a|$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

1.3. Примеры решения задач.

Пример 1.1. Решить неравенство $|x - a| \geq \varepsilon$, где $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ — заданные числа.

▷ По определению модуля $|x - a| \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $\varepsilon < 0$, то решением неравенства является любое $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon \geq 0$. При $x - a \geq 0$ неравенство $|x - a| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $x - a \geq \varepsilon$. Отсюда получаем $x \geq a + \varepsilon$. Если $x - a < 0$, то неравенство $|x - a| \geq \varepsilon$ равносильно $a - x \geq \varepsilon$, откуда $x \leq a - \varepsilon$. Итак, если $\varepsilon < 0$, то множество решений есть $\mathbb{R}$; если $\varepsilon \geq 0$, то множеством решений является множество $(-\infty; a - \varepsilon) \cup (a + \varepsilon; +\infty)$. ◁

Пример 1.2. Доказать равносильность неравенств

$$|x| < \varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon > 0.$$

▷ 1). Пусть $|x| < \varepsilon$. Тогда при $x \geq 0$, учитывая, что $|x| = x$, имеем $0 \leq x < \varepsilon$ и поэтому $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и поэтому получаем неравенство $-x < \varepsilon$, которое равносильно неравенству $x > -\varepsilon$. Отсюда имеем $-\varepsilon < x < 0$ и, следовательно, $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

2). Пусть $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Это означает, что выполняются неравенства $x < \varepsilon$ и $x > -\varepsilon$, последнее из которых равносильно неравенству $-x < \varepsilon$. Поскольку по определению $|x|$ есть либо x , либо $-x$, то получаем $|x| < \varepsilon$. ◁

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Решите уравнения:

1.1. $|2x + 3| = x^2$;

1.2. $|x| = x^2 - 6$;

1.3. $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$;

1.4. $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$.

Решите неравенства:

1.5. $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$;

1.6. $|x^2 - 5x - 6| \leq x^2 - 5x - 6$;

1.7. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} > 6$.

2. Метод математической индукции

2.1. Основные понятия и теоремы. Во многих разделах математики часто приходится доказывать справедливость (истинность) утверждений $P(n)$ (например, тождеств, неравенств) для всех натуральных значений переменной n . Для этого часто используется метод, называемый методом математической индукции. Этот метод основан на следующем принципе математической индукции. Утверждение $P(n)$ считается истинным для любого $n \in \mathbb{N}$, если выполнены два условия:

1) утверждение $P(1)$ истинно;

2) из предположения, что истинно утверждение $P(k)$, где k — любое натуральное число, следует, что истинно утверждение $P(k+1)$.

Метод математической индукции состоит в следующем. Для доказательства справедливости утверждения $P(n)$ при всех натуральных n нужно:

1. Проверить истинность утверждения $P(1)$;
2. Предположить, что утверждение $P(k)$ истинно;
3. Доказать истинность утверждения $P(k+1)$.

Отсюда основания принципа математической индукции заключают, что утверждение $P(n)$ является истинным для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1 (формула бинома Ньютона). Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

$$\text{где } C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Замечание. Из формулы бинома Ньютона следует полезное неравенство

$$(a+b)^n > \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \text{ для любых } a > 0, b > 0. \quad (2.1)$$

2.2. Примеры решения задач.

Пример 2.1. Доказать равенство:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

▷ Это равенство представляет собой утверждение $P(n)$, заданное на множестве натуральных чисел. Докажем его истинность методом математической индукции.

1. Утверждение $P(1)$ истинно, так как $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (2+1)}{6}$.
2. Предположим, что $P(k)$ истинно, т. е. справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3. Прибавив к обеим частям равенства $(k+1)^2$, получим

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

А это означает, что утверждение $P(k+1)$ истинно. Итак, предположив, что равенство истинно при $n = k$, мы доказали его истинность при $n = k+1$. Отсюда следует, что равенство верно для любого $n \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Пример 2.2. Доказать неравенство: $4^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleright$ 1. Утверждение $P(1)$ истинно, так как $4 > 1^2$.

2. Предположим, что $P(k)$ истинно, т. е. $4^k > k^2$. Умножив обе части этого неравенства на 4, получим $4^{k+1} > 4k^2$.

3. Покажем, что $4k^2 \geq (k+1)^2$ для любого $k \geq 1$. Последнее неравенство равносильно квадратному неравенству $3k^2 - 2k - 1 \geq 0$, множество решений которого есть $(-\infty, -1/3] \cup [1, +\infty)$. Поэтому для любого $k \geq 1$ неравенство $4k^2 \geq (k+1)^2$ выполнено. Отсюда следует, что утверждение $P(k+1)$ истинно. Таким образом, неравенство $4^n > n^2$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Пример 2.3. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangleright$ 1. Утверждение $P(1)$ истинно, так как верно неравенство $1 + \alpha \geq 1 + \alpha$.

2. Предположим, что $P(k)$ истинно, т. е. справедливо неравенство $(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha$.

3. Умножим обе части этого неравенства на $1 + \alpha$. Учитывая, что $\alpha > -1$ и поэтому $1 + \alpha > 0$, получим $(1 + \alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha)(1 + \alpha) \geq 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$. Поскольку $k\alpha^2 \geq 0$, то получаем неравенство $(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha$.

Предположив, что данное неравенство истинно при $n = k$, мы доказали его истинность при $n = k+1$. Итак, неравенство Бернулли доказано. $\triangleleft$

2.3. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите равенства:

$$2.1. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2;$$

$$2.2. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1};$$

$$2.3. \quad a + (a + d) + \dots + (a + d(n - 1)) = \frac{2a + d(n - 1)}{2} n$$

— формула суммы n членов арифметической прогрессии;

$$2.4. \quad a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

— формула суммы n членов геометрической прогрессии;

$$2.5. \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Докажите неравенства:

$$2.6. \quad (n + 3)! > 2^{n+3};$$

$$2.7. \quad \sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n};$$

$$2.8. \quad |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$;

$$2.9. \quad (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — числа одного и того же знака, причем $x_i > -1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Ограниченные множества.

Верхняя и нижняя грани

3.1. Основные понятия и теоремы. Наибольшим (наименьшим) элементом множества X называется элемент $x_0 \in X$ такой, что для любого $x \in X$ $x \leq x_0$ ($x \geq x_0$). Наибольший и наименьший элементы обозначаются $\max X$ и $\min X$.

Множество не всегда имеет наибольший и наименьший элементы. Например, интервал не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, а отрезок имеет и наибольший, и наименьший элементы.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Множество X называется *ограниченным*, если существует $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ $|x| \leq M$.

Множество X называется *ограниченным сверху* (снизу), если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x \in X$ $x \leq M$ ($x \geq M$). Число M в этом случае называется числом, ограничивающим сверху (снизу) множество X .

При записи математических предложений (определений, теорем) полезно использовать логические символы. Вместо слова «существует» («найдется») используют символ $\exists$, называемый *квантором существования*, а вместо слова «любой» («каждый») — символ $\forall$, называемый *квантором всеобщности*. Символы $\implies$, $\iff$ используются для замены слов «следует» («влечет») и «равносильно».

С помощью символов $\exists$ и $\forall$ определения ограниченного множества, а также множества, ограниченного сверху (снизу) можно более кратко записать так:

- 1) множество X называется *ограниченным*, если

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in X \quad |x| \leq M;$$

- 2) X называется *ограниченным сверху*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq M;$$

- 3) X называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \geq M.$$

Верхней гранью множества X называется наименьшее из чисел, ограничивающих множество сверху; обозначение верхней грани — $\sup X$. *Нижней гранью* множества X называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество снизу, обозначение нижней грани — $\inf X$.

Если множество X не ограничено сверху, то пишут $\sup X = +\infty$; аналогично, если X не ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

Теорема 3.1. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ является верхней гранью множества X тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) для всех $x \in X$ $x \leq \alpha$; 2) для любого $\beta < \alpha$ существует $x^* \in X$ такой, что $x^* > \beta$.

Теорема 3.2. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ является нижней гранью множества X тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) для всех $x \in X$ $x \geq \alpha$; 2) для любого $\beta > \alpha$ существует $x^* \in X$ такой, что $x^* < \beta$.

Теорема 3.3. 1). Всякое непустое, ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.

2). Всякое непустое, ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань.

3.2. Теоретические упражнения.

Докажите утверждения:

1). Множество X ограничено $\iff X$ ограничено сверху и снизу.

2). Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ $x \leq y$. Тогда X ограничено сверху, Y ограничено снизу и $\sup X \leq \inf Y$.

3). Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $X^* = \{x \mid -x \in X\}$. Тогда $\sup (X^*) = -\inf X$, $\inf (X^*) = -\sup X$.

4). Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ $x < y$. Тогда $\sup X \leq \sup Y$.

5). Сформулируйте и запишите, используя символы $\forall$ и $\exists$, определения множества: а) неограниченного; б) неограниченного снизу; в) неограниченного сверху.

3.3. Примеры решения задач.

Исследовать множество X на ограниченность, ограниченность сверху, ограниченность снизу.

Пример 3.1. $X = \left\{x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$\triangleright$ Имеем $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, положив $M = 1$, получим, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $|x| \leq M$, т. е. множество X ограничено. $\triangleleft$

Пример 3.2. $X = \left\{x = n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$\triangleright$ Имеем $n + \frac{1}{n} > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что X ограничено снизу, причем $M = 0$ — число, ограничивающее это множество снизу. Докажем, что X не ограничено сверху.

Сформулируем отрицание определения множества, ограниченного сверху: $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in X \ x > M$. Возьмем произвольное $M \in \mathbb{R}$ и натуральное n , удовлетворяющее неравенству $n > M$. Для такого n имеем $x_n = n + \frac{1}{n} > M$, а это означает, что X не ограничено сверху. $\triangleleft$

Пример 3.3. Доказать следующие утверждения:

1) если множество X имеет наибольший элемент, то $\sup X = \max X$;

2) если множество X имеет наименьший элемент, то $\inf X = \min X$.

$\triangleright$ По условию существует $x_0 = \max X$. Отсюда следует, что для любого $x \in X$ $x \leq x_0$ и поэтому X ограничено сверху, а x_0 — число, ограничивающее это множество сверху. Покажем, что x_0 — наименьшее такое число. В самом деле, если α — число, ограничивающее множество X сверху, то при всех $x \in X$ $x \leq \alpha$ и поэтому $x_0 \leq \alpha$. Таким образом, доказано, что $\sup X = x_0 = \max X$. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. $\triangleleft$

Найти верхнюю и нижнюю грани множества X , его наибольший и наименьший элементы (если они существуют).

Пример 3.4. $X = (0, 1]$.

$\triangleright$ Для любого $x \in (0, 1]$ имеем $0 \leq x \leq 1$, т.е. множество X ограничено сверху и снизу и поэтому по теореме 3.3 имеет верхнюю и нижнюю грани. Поскольку $1 \in X$, то, в силу утверждения примера 3.3, $\sup X = \max X = 1$. Докажем, что $\inf X = 0$. Имеем: 1) для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \geq 0$; 2) для любого $\beta > 0$ существует $x^* = \beta/2$ такой, что $x^* \in X$ и $x^* < \beta$. Отсюда, согласно теореме 3.2, получаем $\inf X = 0$. Кроме того, отсюда следует, что $\min X$ не существует. $\triangleleft$

Пример 3.5. $X = [2, +\infty)$.

$\triangleright$ Для любого $x \in [2, +\infty)$ имеем $x \geq 2$, т.е. множество X ограничено снизу и поэтому по теореме 3.3 имеет нижнюю грань. Поскольку $2 \in X$, то $\min X = 2$ и $\inf X = \min X = 2$. Множество X не ограничено сверху, так как для любого $M \in \mathbb{R}$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий неравенству $x > M$. В качестве такого x при $M < 2$ можно взять $x = 2$, а при $M \geq 2$ положить $x = M + 1$. Таким образом, имеем $\sup X = +\infty$, $\max X$ не существует. $\triangleleft$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте множество X на ограниченность, ограниченность сверху, ограниченность снизу.

$$3.1. X = (5, +\infty); \quad 3.2. X = (-3, -1) \cup (2, 4);$$

$$3.3. X = \{x = (-1)^n \cdot n^2, n \in \mathbb{N}\};$$

$$3.4. X = \left\{x = -3 + \frac{2}{9^n}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Для множества X найдите $\sup X$, $\inf X$, $\max X$, $\min X$:

$$3.5. X = \{x = ((-1)^n + 1)n^2, n \in \mathbb{N}\};$$

$$3.6. X = \left\{x = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Функция действительной переменной

4.1. Основные понятия и теоремы. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$ — непустые множества. Говорят, что задана *функция f одной действительной переменной*, определенная на X со значениями в Y , если каждому $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. При этом множество X называют *областью определения функции*. Элемент $y_0 \in Y$, соответствующий элементу $x_0 \in X$, называют *значением функции* в точке x_0 , и обозначают $f(x_0)$.

Обозначения функции:

$$1) f : X \mapsto Y, \quad 2) y = f(x), \quad x \in X.$$

Часто используют также сокращенные обозначения: $y = f(x)$, или f . Иногда бывает удобно обозначать функцию тем же символом, что и элемент множества ее значений, т. е. вместо $y = f(x)$ писать $y = y(x)$. Область определения функции обозначают также $D(f)$. Множество чисел $y \in Y$, для каждого из которых существует $x \in X$ такой, что $y = f(x)$, называется *множеством значений функции f* , оно обозначается $E(f)$.

Далее функцию одной действительной переменной будем для краткости называть просто функцией.

Основные способы задания функции:

1. *Аналитический* — закон соответствия между элементами множеств X и Y задается с помощью аналитического выражения (формулы). Обычно при этом область определения функции яв-

но не указывается. Областью определения считается множество всех значений независимой переменной, при которых аналитическое выражение имеет смысл и принимает действительные значения.

2. *Табличный* — закон соответствия между X и Y задается таблицей. Используется для задания функции на конечном множестве.

3. *Словесный* — закон соответствия между X и Y задается в виде словесного описания.

Примеры функций.

1. *Функция — знак x :*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

2. *Функция — целая часть x :* $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть действительного числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x ;

3. *Функция — дробная часть x :* $f(x) = \{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in X$, в прямоугольной системе координат XOY называют множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.

В ряде простейших случаев график функции $y = g(x)$ можно получить преобразованием известного графика другой функции $y = f(x)$.

Функция $y = g(x)$	Преобразование графика $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	сдвиг вдоль оси OY на c
$y = f(x - c)$	сдвиг вдоль оси OX на c
$y = f(-x)$	симметрия относительно оси OY
$y = -f(x)$	симметрия относительно оси OX
$y = af(x)$	растяжение (при $a > 1$) или сжатие (при $0 < a < 1$) по оси OY
$y = f(ax)$	растяжение (при $0 < a < 1$) или сжатие (при $a > 1$) по оси OX

Две функции f и g называются *равными*, если $D(f) = D(g)$ и $f(x) = g(x)$ для любого значения аргумента. Если же это равенство верно лишь на множестве $A \subset D(f) \cap D(g)$, то функции f и g называются *равными на множестве A* . Функция, все

значения которой равны между собой, называется *постоянной*, или *константой* и обозначается $f = \text{const}$, или $f \equiv C$.

4.2. Теоретические упражнения.

1). Приведите пример функции, заданной аналитическим выражением, областью определения которой является: а) множество $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$; б) множество $(-2, 2) \cup (3, 5)$; в) одноэлементное множество $\{\sqrt{2}\}$; г) множество $\{-3, 0, 3\}$.

2). Приведите пример функции, заданной аналитическим выражением, областью значений которой является: а) множество $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; б) интервал $(-2, 2)$; в) множество $\{-3, 3\}$.

4.3. Примеры решения задач.

Пример 4.1. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{x+2}{x^2 - \sqrt[4]{x}}}.$$

▷ Значения $\sqrt[4]{x}$ определены, если $x \geq 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ знаменатель $x^2 - \sqrt[4]{x}$ равен нулю. Поэтому подкоренное выражение $a = \frac{x+2}{x^2 - \sqrt[4]{x}}$ определено и принимает действительные значения при любом $x > 0$, $x \neq 1$. Значения $\sqrt[5]{a}$ определены для всех $a \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем: $D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. ◁

Пример 4.2. Найти множество значений функции

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

▷ Имеем $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$, поскольку $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ при любом $x > 0$. Отсюда следует, что $E(f) \subset [2, +\infty)$. Покажем, что $[2, +\infty) \subset E(f)$. Возьмем произвольный $y \in [2, +\infty)$. Уравнение $x + \frac{1}{x} = y$ при $x \neq 0$ равносильно квадратному уравнению $x^2 - xy + 1 = 0$, которое имеет корни $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$. Если $y \geq 2$, то оба корня

положительны и поэтому принадлежат $D(f)$. Итак, для любого $y \in [2, +\infty)$ существует $x \in D(f)$ такой, что $y = f(x)$, т.е. $[2, +\infty) \subset E(f)$. Таким образом, доказано, что $E(f) = [2, +\infty)$. $\triangleleft$

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите области определения функций:

$$4.1. f = \frac{\sqrt{1/\cos^2 3x - 1}}{5^x - 1}; \quad 4.2. f = \log_5(2 \sin x + 1);$$

$$4.3. f = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x - 1}}{\cos x}.$$

Найдите области значений функций:

$$4.4. f = \sqrt{1 - 4x^2}; \quad 4.5. f = \frac{x - 1}{x + 1};$$

$$4.6. f = \frac{1}{x^2 + 3}; \quad 4.7. f = 9^x + 3^x.$$

Постройте графики функций:

$$4.8. f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$4.9. f(x) = \begin{cases} |x + 1| + |x - 3|, & \text{если } x \geq -2; \\ \frac{|x|}{x}, & \text{если } x < -2. \end{cases}$$

$$4.10. f(x) = \operatorname{sgn} x; \quad 4.11. f(x) = [x]; \quad 4.12. f(x) = \{x\}.$$

Постройте графики функций: $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x) - 2$, $f(x - 2)$, если:

$$4.13. f(x) = 3x + 1; \quad 4.14. f(x) = 2x - x^2; \quad 4.15. f(x) = \frac{1}{x}.$$

Постройте графики функций: $f(x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, если:

4.16. $f(x) = 3x - 1$; 4.17. $f(x) = x^2 - x - 2$;

4.18. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Постройте графики функций методом преобразования:

4.19. $f = 2 + 3 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$; 4.20. $f = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$;

4.21. $f = -\frac{2}{(x+2)^3} + 5$; 4.22. $f = \arcsin \frac{2x-1}{3}$;

4.23. $f = 1 + 2 \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

5. Четные и нечетные функции. Монотонные функции

5.1. Основные понятия и теоремы. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Множество X называется *симметричным*, если вместе с каждым числом x оно содержит и число $(-x)$. Функция f называется *четной*, если ее область определения $D(f)$ — симметричное множество и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция f называется *нечетной*, если ее область определения $D(f)$ — симметричное множество и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется *возрастающей (убывающей)* на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Функция называется *строго возрастающей (строго убывающей)* на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными* функциями.

5.2. Теоретические упражнения

Докажите следующие утверждения:

1). а) произведение двух четных или двух нечетных функций — функция четная;

б) произведение четной и нечетной функций — функция нечетная.

2). Если область определения функции является симметричным множеством, то эта функция представима в виде суммы четной и нечетной функций.

3). а) функция $y = \sin x$ строго возрастает на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$;

б) функция $y = \cos x$ строго убывает на отрезке $[0; \pi]$;

с) сумма двух возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей).

4). Если функция $f(x)$ положительна на множестве A и возрастает на нем, то функция $1/f(x)$ убывает на A .

5). а) если функция $f(x)$ нечетна и убывает в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает в промежутке $(-b, -a)$;

б) если функция $f(x)$ четна и возрастает в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает в промежутке $(-b, -a)$.

6). Верно ли утверждение: если функция $f(x)$ возрастает в интервалах (a, b) и (b, c) , где $a < b < c$, то $f(x)$ возрастает в интервале (a, c) ?

7). Верно ли утверждение: разность двух возрастающих функций является функцией:

а) возрастающей; б) убывающей; в) немонотонной?

8). Существует ли строго возрастающая (убывающая) функция, являющаяся:

а) четной; б) нечетной?

9). Докажите, что $f(x) = [x]$ является возрастающей функцией, но не строго возрастающей.

5.3. Примеры решения задач.

Определить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными.

Пример 5.1. $f = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$.

▷ У данной функции область определения $D(f) = \mathbb{R}$, она симметрична относительно начала координат. Учитывая нечетность функции $y = \sin x$, для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(-x) = \frac{(-x) \sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{x \sin x}{x^2 + 1} = f(x).$$

Следовательно, функция является четной. ◁

Пример 5.2. $f = |x + 2|$.

▷ Область определения функции $D(f) = \mathbb{R}$. Это симметричное множество. Сравним значения $f(x)$ и $f(x)$ для $x = -2$. Имеем $f(-2) = |-2 + 2| = 0$, $f(2) = |2 + 2| = 4$. Таким образом, $f(-2) \neq f(2)$, $f(-2) \neq -f(2)$. Следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной. ◁

Пример 5.3. $f = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

▷ Найдем область определения функции, решив неравенство $\frac{1-x}{1+x} > 0$. Его решениями являются все x , удовлетворяющие неравенству $|x| < 1$. Поэтому $D(f) = (-1, 1)$; это множество симметрично, и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство:

$$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Следовательно, функция является нечетной. ◁

Пример 5.4. $f = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

▷ Область определения функции — все действительные x , кроме тех, которые удовлетворяют уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$. Корни этого уравнения: $x = 1$ и $x = 2$, откуда следует, что $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Множество $D(f)$ не симметрично, поэтому данная функция не является ни четной, ни нечетной. ◁

Пример 5.5. Доказать, что функция $f = ax^2 + bx + c$: а) при $a > 0$ строго убывает на $(-\infty, -b/2a]$ и строго возрастает на $[-b/2a, +\infty)$; б) при $a < 0$ строго возрастает на $(-\infty, -b/2a]$ и строго убывает на $[-b/2a, +\infty)$.

$$\triangleright \text{ Имеем } f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a \left(\left(x_2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(x_1 + \frac{b}{2a} \right)^2 \right) = \\ &= a(x_2 - x_1) \left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

а). Пусть $a > 0$. Тогда при $x_1 < x_2$ знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ определяется знаком сомножителя $\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a} \right)$. Если $x_1, x_2 \in (-\infty, -b/2a]$, то

$$x_1 + x_2 < 2 \left(-\frac{b}{2a} \right) = -\frac{b}{a}; \quad x_1 + x_2 + \frac{b}{a} < 0,$$

и поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$. А это означает, что $f(x)$ строго убывает на $(-\infty, -b/2a]$. При $x_1, x_2 \in [-b/2a, +\infty)$ выполняется неравенство $x_1 + x_2 + b/a > 0$, и поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x)$ возрастает на $[-b/2a, +\infty)$.

б). Если $a < 0$, то доказательство проводится аналогично. $\triangleleft$

Пример 5.6. Найти промежутки монотонности функции

$$f(x) = \frac{1}{x} - x.$$

$\triangleright$ Имеем $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем $f(x)$ — нечетная функция, так как $D(f)$ — симметричное множество и

$$f(-x) = \frac{1}{-x} + x = -f(x) \quad \forall x \in D(f).$$

Функция $f(x)$ убывает в промежутке $(0, +\infty)$, поскольку

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} + (x_1 - x_2) < 0 \text{ при } 0 < x_1 < x_2.$$

Учитывая нечетность функции $f(x)$, отсюда (см. теор. упр. 5, п. 5.2) получаем, что $f(x)$ убывает в промежутке $(-\infty, 0)$. $\triangleleft$

5.4. Задачи для самостоятельной работы.

Определите, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

$$5.1. f = (x - 1)^2; \quad 5.2. f = \sqrt{1 - x^2};$$

$$5.3. f = \sqrt{x}; \quad 5.4. f = \frac{\operatorname{tg} 4x}{x};$$

$$5.5. f = \frac{(x + 2)^3}{(x - 1)^4}; \quad 5.6. f = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Найдите промежутки монотонности функций:

$$5.7. f = x^6 + 8x^4 + 1; \quad 5.8. f = -x^3 - x;$$

$$5.9. f = \frac{1}{4x^2 + 4x + 3}; \quad 5.10. f = \frac{1}{8 - x^3}.$$

6. Ограниченные функции

6.1. Основные понятия и теоремы. Функция f называется *ограниченной на множестве* $A \subset D(f)$, если существует $M > 0$ такое, что для любого $x \in A$ $|f(x)| \leq M$. Функция f называется *ограниченной сверху (снизу) на множестве* $A \subset D(f)$, если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in A$ $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$).

Верхней (нижней) гранью функции f на множестве $A \subset D(f)$ называют верхнюю (нижнюю) грань множества $\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in A\}$.

Верхнюю (нижнюю) грань обозначают $\sup_{x \in A} f(x)$, или $\sup_{x \in A} f$ ($\inf_{x \in A} f(x)$, или $\inf_{x \in A} f$).

Если существует $x_0 \in A$ ($A \subset D(f)$) такой, что при всех $x \in A$ $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), то значение $f(x_0)$ называют *наибольшим (наименьшим) значением функции* f на множестве A . Число $f(x_0)$ в этом случае обозначают $\max_{x \in A} f(x)$, или $\max_{x \in A} f$ ($\min_{x \in A} f(x)$, или $\min_{x \in A} f$). Если функция f имеет наибольшее значение на множестве A , то $\sup_{x \in A} f = \max_{x \in A} f$. Аналогично, если существует $\min_{x \in A} f$, то $\inf_{x \in A} f = \min_{x \in A} f$.

Если $A = D(f)$, то указание на множество A можно опустить.

6.2. Теоретические упражнения.

- 1). Докажите, что сумма и произведение ограниченных функций — ограниченные функции.
- 2). Сформулируйте и запишите, используя символы $\forall$ и $\exists$, определение функции: а) неограниченной; б) неограниченной снизу; в) неограниченной сверху.
- 3). Докажите, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$:
 а) при $a > 0$ ограничена снизу и не ограничена сверху;
 б) при $a < 0$ ограничена сверху и не ограничена снизу.

6.3. Примеры решения задач.

Доказать ограниченность функции $f(x)$.

Пример 6.1. $f = \frac{x}{x^2 + 1}$.

▷ Имеем

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = \frac{|x|}{|x|^2 + 1}.$$

Поскольку $(|x| - 1)^2 \geq 0$, то $|x|^2 + 1 \geq 2|x|$ и поэтому $\frac{|x|}{|x|^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Итак, существует $M = \frac{1}{2}$ такое, что при любом $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq M$, т. е. по определению функция $f(x)$ ограничена.

◁

Пример 6.2. $f = -x^3 - x$, $A = (-2, 3]$.

▷ Функция $f(x)$ строго убывает на $\mathbb{R}$ (задача 5.8). Отсюда имеем: $f(-2) > f(x) \geq f(3)$, т. е. $10 > f(x) \geq -30$ для любого $x \in A$. Следовательно, для любого $x \in A$ $|f(x)| \leq 30$, т. е. $f(x)$ ограничена на множестве A .

◁

Пример 6.3. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x-5}$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

▷ Неограниченность функции f сверху и снизу равносильна неограниченности сверху и снизу множества $E(f)$. Заметим, что

уравнение $y = \frac{1}{x-5}$ имеет решение относительно x для любого $y \neq 0$. Поэтому $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, а это множество не ограничено как сверху, так и снизу. $\triangleleft$

$$\text{Найти } \sup_{x \in A} f(x), \inf_{x \in A} f(x), \max_{x \in A} f(x), \min_{x \in A} f(x).$$

Пример 6.4. $f = \frac{1}{x^2+1}$, $A = \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Рассмотрим множество $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in A\}$. Покажем, что $Y = (0, 1]$. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, то $Y \subset (0, 1]$. Так как для любого $y \in (0, 1]$ уравнение $y = \frac{1}{x^2+1}$ имеет решение $x = \sqrt{1/y-1}$, то $(0, 1] \subset Y$. Таким образом, $Y = (0, 1]$. Для множества $Y = (0, 1]$ имеем (пример 3.4):

$\sup Y = \max Y = 1$, $\inf Y = 0$, $\min Y$ не существует. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} f(x) &= \sup Y = 1, & \max_{x \in A} f(x) &= \max Y = 1 = f(0), \\ \inf_{x \in A} f(x) &= \inf Y = 0, & \min_{x \in A} f(x) &\text{ не существует.} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 6.5. $f = \frac{x+1}{x}$, $A = (0, +\infty)$.

$\triangleright$ Рассмотрим множество $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in A\}$. В примере 4.2 показано, что $Y = [2, +\infty)$. Для множества Y имеем (пример 3.5):

$\inf Y = \min Y = 2$, $\sup Y = +\infty$, $\max Y$ не существует. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} f(x) &= \inf Y = 2, & \min_{x \in A} f(x) &= \min Y = 2 = f(1), \\ \sup_{x \in A} f(x) &= \sup Y = +\infty, & \max_{x \in A} f(x) &\text{ не существует.} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

6.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите ограниченность функций:

$$6.1. f = x^2 - x - 1, \quad A = [-1, 4]; \quad 6.2. f = \frac{1}{x-5}, \quad A = [0, 3];$$

$$6.3. f = \frac{x^3}{x^4+1}; \quad 6.4. f = \frac{2x+3}{|2x+3|}.$$

Исследуйте функции на ограниченность, ограниченность сверху, ограниченность снизу:

$$6.5. f = (x - 1)^2; \quad 6.6. f = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad A = (-1, 1);$$

$$6.7. f = \sqrt{x + 2}, \quad A = (1, 10); \quad 6.8. f = -\frac{1}{x^4}.$$

$$\text{Найдите } \sup_{x \in A} f(x), \quad \inf_{x \in A} f(x), \quad \max_{x \in A} f(x), \quad \min_{x \in A} f(x).$$

$$6.9. f = x^2 + 2x, \quad A = [-3, 0]; \quad 6.10. f = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad A = \mathbb{R};$$

$$6.11. f = \frac{x^2}{x^4 + 2}, \quad A = \mathbb{R}; \quad 6.12. f = \frac{x^3}{|x|}, \quad A = (-\infty, 0).$$

7. Периодические функции

7.1. Основные понятия и теоремы. Множество X называется *периодическим с периодом T* ($T \neq 0$), если из $x \in X$ следует, что $x + T \in X$ и $x - T \in X$. Функция f называется *периодической с периодом T* , если $D(f)$ — периодическое множество с периодом T и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. График функции, периодической с периодом T , переходит в себя при сдвиге на T вдоль оси абсцисс.

7.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

1). Если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T , то функция $f(ax + b)$, где $a \neq 0$, является периодической с периодом T/a .

2). Если T — период функции f , то число $(-T)$ также является периодом этой функции.

3). Если T_1, T_2 — периоды функции f , то число $(T_1 + T_2)$ — также период этой функции.

4). Если T — период функции f , то для любого $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$ число nT также является периодом функции f .

5). Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

является периодической и любое ненулевое рациональное число — ее период.

6). Докажите, что функция $f(x) = \{x\}$ является периодической, причем ее период — любое целое число, отличное от нуля.

7). Верно ли утверждение: а) всякая периодическая функция является либо четной, либо нечетной; б) если $|f(x)|$ — периодическая функция, то $f(x)$ также периодическая функция?

8). Может ли функция, строго монотонная на множестве $\mathbb{R}$, быть периодической?

9). Докажите: а) многочлен степени не ниже первой не является периодической функцией; б) рациональная функция $R(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, не является периодической.

7.3. Примеры решения задач.

Определить, какие из данных функций являются периодическими и указать их период.

Пример 7.1. $f = \operatorname{tg} \frac{3x}{2} + 4$.

▷ Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому данная функция определена при всех x , кроме корней уравнения $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Множество $D(f)$ — периодическое с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$. Докажем, что для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$. Имеем

$$\operatorname{tg} \frac{3(x + 2\pi/3)}{2} + 4 = \operatorname{tg} \left(\frac{3x}{2} + \pi \right) + 4 = \operatorname{tg} \frac{3x}{2} + 4.$$

Следовательно, функция имеет период, равный $\frac{2\pi}{3}$. $\triangleleft$

Пример 7.2. $f = \cos \sqrt{x}$.

$\triangleright$ Область определения функции — все неотрицательные действительные числа, т. е. $D(f) = [0, +\infty)$. Множество $D(f)$ — непериодическое, так как для любого $T > 0$ точка $T \in D(f)$, а точка $-T \notin D(f)$. Поэтому данная функция не является периодической. $\triangleleft$

Пример 7.3. $f = \ln \sin x$.

$\triangleright$ Область определения функции — все действительные числа x , удовлетворяющие неравенству $\sin x > 0$, т. е.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi n < x < \pi(2n + 1), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Функция $y = \sin x$ — периодическая с периодом 2π . Докажем, что $f(x)$ имеет тот же период. Множество $D(f)$ — периодическое с периодом $T = 2\pi$. В самом деле, пусть $x \in D(f)$. Это значит, что при некотором $k \in \mathbb{Z}$ данное x удовлетворяет неравенству $2\pi k < x < \pi(2k + 1)$. Рассмотрим элемент $x + 2\pi$. Прибавив ко всем частям неравенства 2π , получим $2\pi k + 2\pi < x + 2\pi < \pi(2k + 1) + 2\pi$, откуда $2\pi(k + 1) < x + 2\pi < \pi(2(k + 1) + 1)$, т. е. $2\pi k_1 < x + 2\pi < \pi(2k_1 + 1)$, где $k_1 = k + 1$. А это означает, что элемент $(x + 2\pi) \in D(f)$. Аналогично проверяется, что элемент $(x - 2\pi) \in D(f)$. Теперь покажем, что для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + 2\pi) = f(x)$. Имеем $f(x + 2\pi) = \ln \sin(x + 2\pi) = \ln \sin x = f(x)$. Следовательно, данная функция является периодической с периодом $T = 2\pi$. $\triangleleft$

Пример 7.4. $f = (x + 1)^2$.

$\triangleright$ Область определения функции $D(f) = \mathbb{R}$, она является периодическим множеством с любым периодом. Докажем, что данная функция — непериодическая. Достаточно доказать, что функция не имеет положительного периода, так как если бы число $T < 0$ было периодом, то число $(-T)$ было бы положительным периодом. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что число $T > 0$ — период функции, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $(x + T + 1)^2 = (x + 1)^2$. В частности, оно выполнено при $x = 0$, т. е. $(T + 1)^2 = 1$, что неверно для любого $T > 0$. Поэтому неверно и допущение о периодичности данной функции, т. е. эта функция — непериодическая. $\triangleleft$

7.4. Задачи для самостоятельной работы.

Определите, какие из данных функций являются периодическими и укажите их период.

$$7.1. f = \sin(5x + 1); \quad 7.2. f = |\cos x|; \quad 7.3. f = \frac{1}{x};$$

$$7.4. f = \sin x + \cos \frac{x}{3}; \quad 7.5. f = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad 7.6. f = e^{\sqrt{x}};$$

$$7.7. f = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}; \quad 7.8. f = \sin |x|; \quad 7.9. f = \cos^2(x - 1).$$

8. Сложная функция. Обратная функция

8.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ таковы, что множество значений $E(f)$ функции f содержится в области определения $D(g)$ функции g , т. е. $E(f) \subset D(g)$.

Сложной функцией $z = g \circ f$ называют функцию, определенную на множестве $D(f)$ формулой $z(x) = g(f(x))$. Заметим, что сложные функции $g \circ f$ и $f \circ g$ различны.

Основными элементарными функциями называют следующие функции: постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. *Элементарной функцией* называется функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции образования сложной функции.

Пусть задана функция

$$y = f(x), \quad x \in D(f), \quad (8.1)$$

обладающая следующим свойством: для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае для любого $y \in E(f)$ найдется только один $x \in D(f)$ такой, что $f(x) = y$.

Это означает, что отображение $f : D(f) \mapsto E(f)$ взаимнооднозначно.

Функцией, *обратной* к функции f , называется функция, определенная на множестве $E(f)$ по правилу: элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствие элемент $x \in D(f)$ такой, что $f(x) = y$. Обратную функцию обозначают символом f^{-1} . Функция, имеющая обратную, называется *обратимой*.

Функция обратима тогда и только тогда, когда отображение $f : D(f) \mapsto E(f)$ взаимнооднозначно.

Если функция f обратима, то каждая прямая $y = y_0$, где $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in D(f)$, пересекает график f в единственной точке (x_0, y_0) .

Из определения обратной функции имеем: $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$, т.е. области определения и значений обратной функции меняются местами. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*: $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$. Иногда для них удобно использовать обозначения: $y = y(x)$, $x = x(y)$. Обозначим, как обычно, аргумент обратной функции через x , а значение — через y . Тогда получим

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}). \quad (8.2)$$

График обратной функции (8.2) симметричен графику исходной функции (8.1) относительно прямой $y = x$.

8.2. Теоретические упражнения.

1). Может ли иметь обратную: а) четная функция; б) периодическая функция?

2). Может ли нечетная функция иметь обратную? Может ли нечетная функция не иметь обратной? Приведите примеры.

3). Докажите: если нечетная функция имеет обратную, то обратная также является нечетной.

4). Докажите, что дробно-линейная функция $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$, где $c \neq 0$ и $ad \neq bc$, имеет обратную, которая также является дробно-линейной.

5). Докажите, что строго монотонная функция обратима.

8.3. Примеры решения задач.

Пример 8.1. Пусть $f = \sqrt{x^2 - 1}$. Найти функцию $f \circ f$, указать ее область определения.

▷ Функция f определена при всех x , удовлетворяющих неравенству $x^2 - 1 \geq 0$. По определению сложной функции имеем $f \circ f = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$. Для нахождения области определения $f \circ f$ необходимо совместно решить неравенства $x^2 - 1 \geq 0$ и $x^2 - 2 \geq 0$. В результате получим $D(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. ◁

Пример 8.2. Представить функцию $f = |\cos^3(5x - 1)|$ в виде сложной функции более простых элементарных функций.

▷ Учитывая, что $|a| = \sqrt{a^2}$, имеем $f = \sqrt{\cos^6(5x - 1)}$. Поэтому функцию f можно представить как функцию $f = g(t) = \sqrt{t}$ от сложного аргумента $t = \cos^6(5x - 1)$. В свою очередь, функция $t = \cos^6(5x - 1)$ представима в виде $t = h(u) = u^6$, где $u = \cos(5x - 1)$. Наконец, $u = p(v) = \cos v$, где $v = q(x) = 5x - 1$. Таким образом, имеем $f = g \circ h \circ p \circ q$, где $g = \sqrt{t}$, $h = u^6$, $p = \cos v$, $q = 5x - 1$. ◁

Пример 8.3. Доказать, что функция $f(x) = 3x + 5$ обратима. Найти аналитическое выражение для обратной функции.

▷ Имеем $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция $f(x)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, поскольку $f(x_2) - f(x_1) = 3(x_2 - x_1) > 0$ при $x_1 < x_2$. Отсюда получаем, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. отображение $f: D(f) \rightarrow E(f)$ взаимнооднозначно. Поэтому f обратима, причем $D(f^{-1}) = E(f) = \mathbb{R}$. Найдем аналитическое выражение для f^{-1} . Для этого решим относительно x уравнение $y = 3x + 5$. Получим $x = \frac{y - 5}{3}$. Обозначив аргумент обратной функции через x , окончательно имеем $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3}$. ◁

Пример 8.4. Доказать: 1) $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, не является обратимой; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in (-\infty; 2]$, обратима, найти аналитическое выражение для обратной функции.

▷ 1). Рассмотрим $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Поскольку $x_1 \neq x_2$, $f(x_2) = f(x_1) = 2$, то отображение $f: D(f) \rightarrow E(f)$ не взаимнооднозначно. Поэтому $f(x)$ не обратима.

2). Из определения f имеем $D(f) = (-\infty; 2]$, и поскольку $f(x) = (x - 2)^2 - 2$, то $E(f) = [-2, +\infty)$. Докажем, что f строго убывает. Имеем $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4)$. Если $x_1, x_2 \in (-\infty; 2]$ и $x_1 < x_2$, то выполнены неравенства $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 - 4 < 0$ и поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. f строго убывает. Отсюда следует, что функция $f(x)$ обратима. Имеем $D(f^{-1}) = E(f) = [-2, +\infty)$, $E(f^{-1}) = D(f) = (-\infty; 2]$. Аналитическое выражение для f^{-1} найдем, решив относительно x уравнение $y = (x - 2)^2 - 2$. Получим $x = 2 \pm \sqrt{y + 2}$. Множеству $E(f^{-1}) = (-\infty; 2]$ принадлежит только одно решение $x = 2 - \sqrt{y + 2}$. Окончательно имеем $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 2}$, $x \in [-2, +\infty)$. $\triangleleft$

8.4. Задачи для самостоятельной работы.

Для заданных пар функций f и g найдите сложные функции $f \circ g$, $g \circ f$, укажите их области определения.

$$8.1. f = |x|, g = 1 - x; \quad 8.2. f = x^5, g = 3 + x;$$

$$8.3. f = \log_2 x, g = \sqrt{x}; \quad 8.4. f = \ln x^2, g = \sin x.$$

Представьте функцию f в виде сложной функции более простых элементарных функций:

$$8.5. f = (1 - 4x)^{10}; \quad 8.6. f = \sqrt[5]{\cos 2x};$$

$$8.7. f = \ln \sin \log_3 x; \quad 8.8. f = \operatorname{tg} (5^{\sin x}).$$

Определите, обратима ли заданная функция f ; если да, то найдите аналитическое выражение, область определения обратной функции и постройте ее график.

$$8.9. f = \frac{1}{x+1}; \quad 8.10. f = \sin 2x, x \in [0, \pi];$$

$$8.11. f = x + 2\sqrt{x}, x \geq 0; \quad 8.12. f = -x^3;$$

$$8.13. f = \sqrt{4 - x^2}; \quad 8.14. f = |x - 1|;$$

$$8.15. f = \sqrt{x+2}; \quad 8.16. f = \frac{x}{1+x}.$$

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Понятие последовательности. Ограниченные, монотонные последовательности

1.1. Основные понятия и теоремы. *Последовательностью* называется функция, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Значения такой функции обозначаются x_n и называются *членами последовательности*, число n называется *номером члена* x_n . Последовательность обозначают символом $\{x_n\}$. Последовательность можно задать с помощью формулы вида $x_n = f(n)$, выражающей x_n через номер n . Формулу такого вида называют *формулой общего члена последовательности*. Для задания последовательности используют и *рекуррентные формулы*, т. е. формулы, выражающие $(n+1)$ -й член последовательности через члены с меньшими номерами. С помощью рекуррентных формул определяются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметической прогрессией называется последовательность $\{a_n\}$, определяемая формулой $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$, где a_1 , d — заданные числа; d — *разность* арифметической прогрессии.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрической прогрессией называется последовательность $\{b_n\}$, определяемая формулой $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in \mathbb{N}$, где b_1 , q — заданные числа, отличные от нуля; q — *знаменатель* геометрической прогрессии.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{если } q \neq 1.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leq M$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу)*, если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \leq M$ ($x_n \geq M$).

Последовательность называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$). Последовательность называется *строго возрастающей (строго убывающей)* если для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$). Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными*.

1.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена как сверху, так и снизу.

2). Докажите: если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности, то ограничены последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3). Верно ли утверждение: если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности, причем $y_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n/y_n\}$ — ограниченная последовательность?

4). Докажите формулы общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

5). Является ли арифметическая (геометрическая) прогрессия: а) ограниченной последовательностью; б) монотонной последовательностью?

6). Докажите, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является убывающей.

1.3. Примеры решения задач.

Исследовать последовательность $\{x_n\}$ на ограниченность.

Пример 1.1. $x_n = \frac{(-1)^n n + 3}{\sqrt{2n^2 + 5}}$.

▷ Заметим, что

$$|3 + (-1)^n n| \leq 3 + |(-1)^n n| = 3 + n, \quad \sqrt{2n^2 + 5} > \sqrt{2n^2} > n.$$

Отсюда имеем для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| = \frac{|3 + (-1)^n n|}{\sqrt{2n^2 + 5}} \leq \frac{3 + n}{n} = \frac{3}{n} + 1 \leq 4.$$

Таким образом, существует $M = 4$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$. Следовательно, по определению $\{x_n\}$ ограничена. ◁

Пример 1.2. $x_n = \frac{n}{a^n}$, $a > 1$.

▷ Используя неравенство Бернулли (пример 2.3, глава 1) и учитывая, что $a - 1 > 0$, имеем для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n &= (1 + a - 1)^n \geq 1 + n(a - 1) \geq n(a - 1) \implies \frac{a^n}{n} \geq a - 1 > 0 \implies \\ &\implies 0 < \frac{n}{a^n} \leq \frac{1}{a - 1} \implies \left| \frac{n}{a^n} \right| \leq \frac{1}{a - 1}. \end{aligned}$$

Итак, существует $M = \frac{1}{a - 1}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leq M$, т.е. $\{x_n\}$ ограничена. ◁

Пример 1.3. $x_n = 3^{n(-1)^n}$.

▷ Сформулируем отрицание определения ограниченной последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого $M > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_n| > M$. Нужно доказать, что это определение выполняется для $\{3^{n(-1)^n}\}$. Заметим, что при четном n $|x_n| = 3^{n(-1)^n} = 3^n$. Возьмем любое $M > 0$ и произвольное четное n , удовлетворяющее неравенству $n > \log_3 M$. Для такого n имеем $|x_n| = 3^n > 3^{\log_3 M} = M > 0$, т.е. $|x_n| > M$. Итак, $\{x_n\}$ не ограничена. Отметим, что $\{x_n\}$ ограничена снизу, поскольку $x_n = 3^{n(-1)^n} > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. ◁

Исследовать последовательность $\{x_n\}$ на монотонность.

Пример 1.4. $x_n = \frac{n}{2n - 1}$.

▷ Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0.$$

Отсюда получаем: $x_n > x_{n+1}$, т. е. $\{x_n\}$ строго убывает. ◁

Пример 1.5. $x_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$.

▷ Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $x_n > 0$ и

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n(n+2)!} = \frac{2}{n+2} < 1.$$

Отсюда получаем: $x_n > x_{n+1}$, т. е. $\{x_n\}$ строго убывает. ◁

Пример 1.6. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

▷ Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \\ &= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Из неравенства Бернулли (пример 2.3, глава 1) для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

т. е. при всех $x_{n+1} > x_n$ и, следовательно, $\{x_n\}$ строго возрастает. ◁

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте последовательность $\{x_n\}$ на ограниченность, ограниченность сверху, ограниченность снизу.

$$1.1. \ x_n = \frac{2n^3 - 1}{2 - n^3}; \quad 1.2. \ x_n = \frac{1 - n}{\sqrt{n}};$$

$$1.3. \ x_n = n^4 - 2n; \quad 1.4. \ x_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}.$$

Исследуйте последовательность $\{x_n\}$ на монотонность.

$$1.5. \ x_n = \frac{2n^2}{n^2 + 3}; \quad 1.6. \ x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1};$$

$$1.7. \ x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}; \quad 1.8. \ x_n = (-1)^n.$$

2. Предел последовательности

2.1. Основные понятия и теоремы. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что при любом $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, или $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

С помощью логической символики определение предела последовательности можно кратко записать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Рассмотрим ε -окрестность точки a , т. е. множество $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Используя понятие окрестности точки, можно дать следующую равносильную формулировку определения предела последовательности.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a существует натуральное число N такое, что все члены последовательности, номера которых больше N , принадлежат этой окрестности. Это определение можно сформулировать и так: число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если вне любой окрестности точки a лежит не более, чем конечное число членов этой последовательности.

Краткая формулировка этого определения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Если последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Теорема 2.1 (единственность предела последовательности). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $a = b$.

Теорема 2.2 (ограниченность последовательности, имеющей предел). *Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

2.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

1). Если $x_n = c = \text{const}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

2). а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff$ в любой ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a лежат все члены последовательности $\{x_n\}$ за исключением, быть может, конечного их числа;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff$ вне любой ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a находится не более, чем конечное число членов последовательности $\{x_n\}$;

в) изменение конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость или расходимость.

3). Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. Существуют ли значения a , при которых верно обратное утверждение?

4). Верно ли утверждение: сходящаяся последовательность монотонна и ограничена?

2.3. Примеры решения задач.

Используя определение предела последовательности, доказать равенство.

Пример 2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+1} = -2$.

▷ В соответствии с определением предела последовательности нужно доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - (-2)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим

$$|x_n - (-2)| = \left| \frac{-2n}{n+1} + 2 \right| = \left| \frac{2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}. \quad (2.1)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Необходимо указать номер N такой, что при любом $n > N$ выполняется неравенство $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$. Для нахождения N решим это неравенство относительно n . Получим $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Отсюда следует, что в качестве N можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Тогда в силу (2.1) для любого $n > N$ имеем $|x_n - (-2)| < \varepsilon$. А это означает по определению предела последовательности, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$. $\triangleleft$

Пример 2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{(n+2)4^n} = 0$.

$\triangleright$ Имеем

$$|x_n - 0| = \left| \frac{7n-1}{(n+2)4^n} \right| = \frac{7n-1}{(n+2)4^n} < \frac{7}{4^n} < \frac{7}{n}, \quad (2.2)$$

поскольку $\frac{7n-1}{n+2} < 7$, $4^n > n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для нахождения N решим неравенство $\frac{7}{n} < \varepsilon$ относительно N . Получим $n > \frac{7}{\varepsilon}$. Отсюда с учетом (2.2) следует, что в качестве N можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{7}{\varepsilon}$. Итак, доказано:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (N > \frac{7}{\varepsilon}) \quad \forall n > N \quad |x_n - 0| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. $\triangleleft$

Пример 2.3. Доказать утверждение: пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq 0$; тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

$\triangleright$ Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}. \quad (2.3)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Отсюда, положив $\varepsilon_1 = \varepsilon\sqrt{a}$, по определению предела имеем: существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \varepsilon_1 &\implies |x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a} \implies \\ \implies |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon &\text{ в силу (2.3).} \end{aligned}$$

А это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. $\triangleleft$

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится.

Пример 2.4. $x_n = (-1)^n$.

$\triangleright$ Сформулируем отрицание определения предела последовательности на «языке окрестностей»: число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует окрестность точки a , вне которой находится бесконечно много членов $\{x_n\}$. Нам нужно доказать, что никакое $a \in \mathbb{R}$ не является пределом $\{x_n\}$. Сначала рассмотрим случай, когда $a \in \mathbb{R}$ и $|a| \neq 1$. Для заданной последовательности $x_n = -1$ при нечетном n и $x_n = 1$ при четном n . Положим $r = \min(|a - 1|, |a + 1|)$ и рассмотрим окрестность $U_r(a)$ точки a . Она не содержит ни одного члена x_n . А это означает, что рассматриваемое a не является пределом x_n . Возьмем теперь $a = 1$ и рассмотрим окрестность $U_1(1)$ этой точки, т. е. интервал $(0, 2)$. Поскольку $x_n = -1$ при нечетном n , то все такие члены лежат вне интервала $(0, 2)$. Таким образом, вне окрестности $U_1(1)$ находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и поэтому число $a = 1$ не является ее пределом. Аналогично доказывается, что $a = -1$ не может быть пределом $\{x_n\}$. Итак, $\{x_n\}$ расходится. $\triangleleft$

Пример 2.5. $x_n = \frac{n^2 - 3}{100n}$.

$\triangleright$ Необходимым условием сходимости последовательности $\{x_n\}$ по теореме 2.2 является ее ограниченность. Поэтому достаточно доказать, что $\{x_n\}$ неограничена. Имеем $|x_n| \geq x_n = \frac{n^2 - 3}{100n} \geq \frac{n - 3}{100}$, так как $n^2 - 3 > n - 3$, $100n > 100$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное $M > 0$ и любое n , удовлетворяющее неравенству $\frac{n - 3}{100} > M$, т. е. $n > 100M + 3$. Для такого n имеем $|x_n| > M$, значит последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, и поэтому расходится. $\triangleleft$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Используя определение предела последовательности, докажите равенства:

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{2+3n} = -\frac{2}{3}; \quad 2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}} = 0;$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad p \in \mathbb{N}; \quad 2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0, \quad a > 1.$$

Докажите сходимость последовательностей:

$$2.5. x_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}; \quad 2.6. x_n = -4 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad 2.7. x_n = \frac{n^3 - 4n}{n^5 + 1}.$$

Докажите расходимость последовательностей:

$$2.8. x_n = (-1)^{n+1} - 2; \quad 2.9. x_n = n^2 \cos \frac{\pi n}{2}; \quad 2.10. x_n = \cos \frac{\pi n}{2}.$$

3. Переход к пределу в неравенствах

3.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 3.1 (о трех последовательностях). Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют условиям:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a;$$

2) при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Теорема 3.2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, причем $a < b$.

Тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $x_n < y_n$.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия:

$$1) \text{ существуют } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b;$$

2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n > y_n$ ($x_n \geq y_n$).

Тогда $a \geq b$.

Теоремы 3.1 и 3.3 остаются справедливыми и в том случае, если неравенство, указанное в условии 2, выполнено не для всех натуральных n , а лишь начиная с некоторого номера.

3.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

- 1). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ и $x_n \neq 0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $y_n = 1/x_n$ ограничена.
- 2). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ $x_n > b$ ($x_n \geq b$). Тогда $a \geq b$.

3.3. Примеры решения задач.

Доказать равенство.

Пример 3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin n)^2}{n} = 0$.

▷ Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 \leq (\sin n)^2 \leq 1$, и поэтому

$$0 \leq \frac{(\sin n)^2}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Положим

$$x_n = 0, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad z_n = \frac{(\sin n)^2}{n}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ (задача 2.3), то последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Отсюда имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin n)^2}{n} = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{n^n} = 0$.

▷ Для всех $n \geq 12$ справедливо неравенство $6/n \leq 1/2$, и поэтому

$$0 \leq \left(\frac{6}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Положим $x_n = 0$, $y_n = (1/2)^n$, $z_n = (6/n)^n$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

(задача 2.4), то последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1 (второе условие выполнено при $n \geq 12$). Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{n^n} = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

▷ Заметив, что при $n \geq 6$ справедливо неравенство $3/n \leq 1/2$, имеем

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3^5}{5!} \cdot \frac{3 \cdots 3}{6 \cdots n} \leq \frac{243}{120} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} = \frac{243 \cdot 32}{120} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (задача 2.4), то из теоремы 3.1 следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$. △

Пример 3.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 1$.

▷ Положим $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Тогда $\alpha_n \geq 0$ и $n = (1 + \alpha_n)^n$. Используя неравенство Бернулли (пример 2.3, глава 1), имеем

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n \geq n\alpha_n.$$

Отсюда следует, что $0 < \alpha_n \leq a/n$ и поэтому $1 < 1 + \alpha_n \leq 1 + a/n$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n) = 1$, то положив

$$x_n = 1, \quad y_n = 1 + \alpha_n, \quad z_n = 1 + a/n$$

и применив теорему 3.1, получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 3.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

▷ Положим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $\alpha_n \geq 0$ и $n = (1 + \alpha_n)^n$. Используя неравенство (2.1), глава 1, имеем

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2.$$

При $n \geq 2$ выполняется неравенство $n - 1 \geq n/2$ и поэтому справедливы неравенства

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 \geq \frac{n^2}{4} \alpha_n^2, \\ 0 &\leq \alpha_n \leq 2/\sqrt{n}, \\ 1 &\leq 1 + \alpha_n \leq 1 + 2/\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/\sqrt{n}) = 1$, то теореме 3.1 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1. \quad \triangleleft$$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите равенства:

$$\begin{aligned} 3.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2000}{n} \right)^n &= 0; & 3.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{n^2} \right)^n &= 0; \\ 3.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{4n-1} \right)^n &= 0. \end{aligned}$$

4. Бесконечно малые последовательности

4.1. Основные понятия и теоремы. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Теорема 4.1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой, последовательность $\{y_n\}$ ограничена. Тогда произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4.2. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff$ последовательность $\alpha_n = x_n - a$ — бесконечно малая.

4.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

1). Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

2). Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, причем при любом $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$. Тогда последовательность $\beta_n = \alpha_n/x_n$ — бесконечно малая.

3). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

4). Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = 0$.

4.3. Примеры решения задач.

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой.

Пример 4.1. $x_n = q^n$, $|q| < 1$.

▷ Если $q = 0$, то $q^n = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Пусть $0 < |q| < 1$. Докажем, что последовательность $\{q^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно малой, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |q^n| < \varepsilon$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для нахождения N решим неравенство $|q^n| < \varepsilon$ относительно n . Получим $n > \log_{|q|} \varepsilon$. Итак, доказано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (N > \log_{|q|} \varepsilon) \quad \forall n > N \quad |q^n| < \varepsilon,$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 4.2. $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{3n-1}}$.

▷ Имеем $x_n = \sin n \cdot \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$. Последовательность $\{\sin n\}$ ограничена, а $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3n-1}} \right\}$ — бесконечно малая (задача 2.2). От-

сюда по теореме 4.1 получаем, что $\{x_n\}$ есть бесконечно малая.

◁

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Определите, является ли последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малой.

$$4.1. x_n = \frac{3 - 2n}{10n + 7};$$

$$4.2. x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}};$$

$$4.3. x_n = \frac{n + 8}{-n^2};$$

$$4.4. x_n = \frac{q^n}{n}, \quad |q| \leq 1;$$

$$4.5. x_n = \frac{\cos n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{N};$$

$$4.6. x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{(-1)^n}{n}.$$

5. Бесконечно большие последовательности

5.1. Основные понятия и теоремы. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| > A.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой положительной*, если

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > A.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой отрицательной*, если

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n < -A.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Во всех этих случаях говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел, соответственно равный ∞ , $+\infty$, $-\infty$.

Всякая бесконечно большая последовательность является расходящейся.

Теорема 5.1. 1). Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

2). Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$.

3). Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$ ($x_n < 0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = +\infty$
 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = -\infty \right)$.

Теорема 5.2 (свойства бесконечно больших, связанные с неравенствами). 1). Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

2). Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$.

Теорема 5.3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Тогда

1) если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = -\infty$.

Теорема 5.4. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Тогда

1) если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$.

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b < 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = -\infty$.

3) если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = -\infty$.

5.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

1). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

2). Пусть $|x_n| \geq |y_n|$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

3). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\infty$.

$$4). \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = +\infty.$$

$$5). \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \infty.$$

6). Произведение двух бесконечно больших последовательностей противоположных знаков есть отрицательная бесконечно большая последовательность.

7). Произведение двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть положительная бесконечно большая последовательность.

8). Пусть $x_n \geq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = +\infty$.

9). Верно ли утверждение: 1) всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной; 2) любая неограниченная последовательность является бесконечно большой?

5.3. Примеры решения задач.

Доказать.

Пример 5.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$, $a > 1$.

▷ Докажем, что последовательность $\{a^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой положительной, т. е.

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a^n > A.$$

Возьмем произвольное $A > 0$. Для нахождения номера N решим относительно n неравенство $a^n > A$. Получим $n > \log_a A$. Поэтому в качестве N можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \log_a A$. Итак,

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (N > \log_a A) \quad \forall n > N \quad a^n > A,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.

◁

Пример 5.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot n^2 = \infty$.

▷ Для доказательства воспользуемся определением бесконечно большой последовательности. Возьмем произвольное $A > 0$. Поскольку $|x_n| = |(-1)^n \cdot n^2| = n^2$, то неравенство $|x_n| > A$ равносильно неравенству $n^2 > A$, которое выполняется для всех $n > \sqrt{A}$. Таким образом, $\forall A > 0 \exists N \in \mathbb{N} (N > \sqrt{A}) \forall n > N |(-1)^n \cdot n^2| > A$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot n^2) = \infty$. ◁

Пример 5.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n^2}{n+8} = -\infty$.

▷ Заметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\frac{n^2}{n+8} \geq n-8$ и поэтому

$$-\frac{n^2}{n+8} \leq 8-n. \quad (5.1)$$

Из теоремы 5.4 (часть 3) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (8-n) = -\infty$, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (n) = +\infty$. Учитывая (5.1), по теореме 5.2 (часть 2) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n^2}{n+8} = -\infty$. ◁

Пример 5.4. Доказать, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

▷ а). Докажем, что $\{x_n\}$ удовлетворяет определению неограниченной последовательности. Возьмем произвольное $M > 0$. При четном n $x_n = n$, и поэтому неравенство $|x_n| > M$ равносильно неравенству $n > M$. Следовательно, если n — четное и $n > M$, то $|x_n| > M$. А это означает, что $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность.

б). Докажем, что $\{x_n\}$ не является бесконечно большой последовательностью. Сформулируем отрицание определения бесконечно большой последовательности:

$$\exists A > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |x_n| \leq A.$$

Заметим, что $|x_n| = |1/n| \leq 1$ при нечетном n . Отсюда следует, что для $A = 1$ и любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n > N$ (в качестве n можно взять любое нечетное $n > N$) такое, что $|x_n| \leq A$. А это означает, что $\{x_n\}$ не является бесконечно большой. ◁

5.4. Задачи для самостоятельной работы.*Докажите равенства:*

5.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$; 5.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty, p \geq 1$;

5.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, |q| > 1$; 5.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 2n^3) = -\infty$;

5.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty$; 5.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{n^2} = +\infty$.

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, но не является бесконечно большой:

5.7. $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{2}$; 5.8. $x_n = n(1 + (-1)^n)$.

6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями**6.1. Основные понятия и теоремы.***Теорема 6.1 (предел суммы, разности и произведения).**Пусть*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Тогда имеют предел последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

Теорема 6.2 (предел частного). Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0.$$

*и $y_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.**Тогда имеет предел последовательность $\{x_n/y_n\}$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = a/b$.*

В ряде случаев последовательность, предел которой надо вычислить, представляет собой результат выполнения какой-либо арифметической операции над последовательностями, но теоремы 6.1 и 6.2 применить нельзя. В этом случае говорят, что

последовательность представляет собой *неопределенность*. Например, пусть $z_n = x_n/y_n$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, то говорят, что отношение $\{x_n/y_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ есть *неопределенность вида 0/0*. *Раскрыть неопределенность* — это значит найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ или доказать, что он не существует. Аналогично вводятся неопределенности вида ∞/∞ , $0/\infty$, $\infty - \infty$.

6.2. Теоретические упражнения.

1). Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ и

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$;
 в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ не существует.

2). Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Следует ли отсюда, что является расходящейся последовательность:

- а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n \cdot y_n\}$?

3). Докажите утверждение: если последовательность $\{x_n\}$ сходится, причем ее предел отличен от нуля, а последовательность $\{y_n\}$ расходится, то последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ — расходится.

4). Верно ли утверждение: если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ расходятся, то последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ расходится?

5). Верно ли утверждение: если $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$, то хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ является бесконечно малой?

6.3. Примеры решения задач.

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Пример 6.1. $x_n = \frac{5n^5}{n^4 + 1}$.

▷ Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^5) = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 + 1) = \infty$, то имеем неопределенность вида ∞/∞ . Для ее раскрытия выполним тождественные преобразования x_n :

$$x_n = \frac{5n^5}{n^4 + 1} = n \cdot \frac{5n^4}{n^4 + 1} = n \cdot \frac{5}{1 + \frac{1}{n^4}}.$$

Учитывая, что $\left\{\frac{1}{n^4}\right\}$ — бесконечно малая, и применяя теоремы 6.1 и 6.2, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{1}{n^4}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 5}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^4})} = \frac{5}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}} = \frac{5}{1} = 5 > 0.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, то по теореме 5.4 окончательно получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. $\triangleleft$

Пример 6.2. $x_n = \frac{3^n + 2^n}{5 + 3^{n+1}}$.

▷ Имеем неопределенность вида ∞/∞ . Преобразуем x_n , разделив числитель и знаменатель на 3^n : $x_n = \frac{1 + (2/3)^n}{5/3^n + 1/3}$. Теперь для вычисления предела можно применить теоремы 6.1 и 6.2. Учитывая результат примера 4.1, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5/3^n + 3} = \frac{1 + 0}{0 + 3} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

Пример 6.3. $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2} + n}{n^2 + 3n}$.

▷ Имеем неопределенность вида ∞/∞ . Преобразуем x_n , разделив числитель и знаменатель на n^2 :

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2} + n}{n^2 + 3n} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}.$$

Учитывая, что $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$, $\left\{\frac{2}{n^4}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малые, а также утверждение примера 2.3 из п. 2.2, и применяя теоремы 6.1 и 6.2, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}\right)} + \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{0} + 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 6.4. $x_n = \sqrt{2n^2 + n} - n\sqrt{2}$.

▷ Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем x_n , умножив числитель и знаменатель на $(\sqrt{2n^2 + n} + n\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(\sqrt{2n^2 + n} - n\sqrt{2})(\sqrt{2n^2 + n} + n\sqrt{2})}{\sqrt{2n^2 + n} + n\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2n^2 + n - 2n^2}{\sqrt{2n^2 + n} + n\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2n^2 + n} + n\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

В результате приходим к неопределенности ∞/∞ , которая аналогична рассмотренной в примере 6.3. Используя утверждение примера 2.3, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \triangleleft$$

6.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

6.1. $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n};$

6.2. $x_n = \frac{n2^{-n}}{n+2};$

6.3. $x_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 3n - 2};$

6.4. $x_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^3 + 1};$

6.5. $x_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+6)^2}{n^2};$

6.6. $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)};$ 6.7. $x_n = \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n};$

$$6.8. \ x_n = \frac{3n}{3n^2 + 1} \sin \frac{n-1}{n+1}; \quad 6.9. \ x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n};$$

$$6.10. \ x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \quad 6.11. \ x_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1};$$

$$6.12. \ x_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1};$$

$$6.13. \ x_n = n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

7. Подпоследовательность. Частичный предел

7.1. Основные понятия и теоремы. Пусть $\{x_n\}$ — некоторая последовательность, $\{k_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Выберем из последовательности $\{x_n\}$ члены с номерами, принадлежащими последовательности $\{k_n\}$: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$. Полученную последовательность $\{x_{k_n}\}$ называют *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 7.1. Пусть

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$ или один из символов $+\infty$ или $-\infty$;
- 2) $\{x_{k_n}\}$ — любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$.

Теорема 7.2 (Больцано–Вейерштрасса). Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Предел подпоследовательности данной последовательности называется *частичным пределом* последовательности, или *предельной точкой* последовательности.

Теорема 7.3. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет единственный частичный предел.

Аналогом теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченных последовательностей является следующая теорема.

Теорема 7.4. Всякая неограниченная последовательность содержит либо бесконечно большую положительную подпоследовательность, либо бесконечно большую отрицательную подпоследовательность.

7.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

- 1). Число $a \in \mathbb{R}$ — частичный предел последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой ε -окрестности точки a содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.
- 2). Ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.
- 3). Сходящаяся последовательность имеет только один частичный предел, совпадающий с ее пределом.
- 4). Монотонная ограниченная последовательность имеет только один частичный предел.
- 5). Пусть $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ — подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$, причем $\{x_{2k}\}$ имеет предел a , а $\{x_{2k-1}\}$ имеет предел b , где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда только a и b являются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$.
- 6). Из любой ограниченной последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.
- 7). Из каждой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.
- 8). Если последовательность монотонна и не ограничена, то любая ее подпоследовательность также монотонна и не ограничена.
- 9). Приведите пример последовательности:
 - а) расходящейся и имеющей только один частичный предел;
 - б) имеющей только два частичных предела;
 - в) не имеющей частичных пределов.
- 10). Верно ли утверждение:
 - а) предел последовательности является ее частичным пределом;

б) если последовательность имеет единственный частичный предел, то она сходится?

11). Существует ли неограниченная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность?

7.3. Примеры решения задач.

Пример 7.1. Доказать, что последовательность $x_n = \cos \pi n$ расходится.

▷ Рассмотрим две подпоследовательности этой последовательности: $x_{2k} = \cos 2\pi k$ и $x_{2k-1} = \cos(2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = -1$. Следовательно, у последовательности $\{\cos \pi n\}$ есть два частичных предела: 1 и -1 . По теореме 7.3 заключаем, что она расходится, поскольку сходящаяся последовательность имеет только один частичный предел. ◁

Пример 7.2. Доказать, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также является бесконечно большой.

▷ Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $\{x_{k_n}\}$ — ее подпоследовательность. По определению бесконечно большой последовательности имеем:

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| > A.$$

Поскольку $k_n \geq n$, то при любом $n > N$ выполняется неравенство $k_n > N$ и поэтому $|x_{k_n}| > A$. Следовательно, $\{x_{k_n}\}$ — бесконечно большая. ◁

Пример 7.3. Доказать, что бесконечно большая последовательность не имеет частичных пределов.

▷ Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $a \in \mathbb{R}$ — ее частичный предел. Тогда у $\{x_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$. С другой стороны, $\{x_{k_n}\}$ — бесконечно большая, поскольку (пример 7.2) она является подпоследовательностью бесконечно большой последовательности. Поэтому $\{x_{k_n}\}$ расходится. Полученное противоречие показывает, что $\{x_n\}$ не имеет частичных пределов. ◁

7.4. Задачи для самостоятельной работы.

Укажите сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$:

$$7.1. x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right); \quad 7.2. x_n = 2 + \cos \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{n+1}{n};$$

$$7.3. x_n = n((-1)^n + 1).$$

Найдите все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$:

$$7.4. x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}; \quad 7.5. x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$7.6. x_n = \frac{-n^3}{n^2+1}; \quad 7.7. x_n = \cos \frac{\pi n}{3};$$

$$7.8. x_n = (-1)^n \frac{3n+1}{2n}; \quad 7.9. x_n = (-1)^n + 4.$$

8. Предел монотонной последовательности.

Число e

8.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 8.1. 1). Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, то $\{x_n\}$ сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

2). Если последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу, то $\{x_n\}$ сходится, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

Теорема 8.2. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Предел этой последовательности — действительное число, которое обозначают e , т. е.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e играет важную роль в математическом анализе.

8.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

- 1). Если последовательность ограничена снизу (сверху) и убывает (возрастает), начиная с некоторого номера, то она сходится.
- 2). Возрастающая (убывающая) последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху (снизу).
- 3). Монотонная ограниченная последовательность сходится.
- 4). Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

8.3. Примеры решения задач.

Пример 8.1. Найти предел последовательности

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^n.$$

▷ Имеем

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^{n+5}}{\left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^5}.$$

Найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Заметим, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^{n+5}$ является подпоследовательностью последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Применив теоремы 7.1 и 8.2, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$. Теперь найдем предел последовательности $z_n = \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^5$. Применив теоремы о пределе суммы и произведения, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (1+0)^5 = 1$. Наконец, используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n} = \frac{e}{1} = e.$$

◁

Пример 8.2. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n^3}{10^n}$ имеет предел и найти его.

▷ Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, так как $x_n > 0$ для любого n . Докажем, что $\{x_n\}$ убывает. Рассмотрим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^3 \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3.$$

Поскольку для любого $n \geq 1$ $(1 + 1/n)^3 < 8$, то $x_{n+1}/x_n < 8/10 < 1$. Значит, $\{x_n\}$ — убывающая. Отсюда по теореме 8.2 следует, что $\{x_n\}$ сходится. Обозначим $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя

к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве $x_{n+1} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 x_n$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Откуда $L = \frac{1}{10}L$, $L = 0$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. ◁

Пример 8.3. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, имеет предел, и найти его.

▷ Сначала докажем, что $\{x_n\}$ ограничена. Применим метод математической индукции. Очевидно, что $1 < x_1 < 2$. Пусть $1 < x_k < 2$, тогда имеем

$$1 < \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2 \implies 1 < x_{k+1} < 2.$$

Отсюда получаем, что $1 < x_n < 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем теперь, что $\{x_n\}$ возрастает. Имеем $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2$. Отсюда получаем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{x_{n+1} + x_n} > 0,$$

т. е. $x_{n+1} > x_n$. Таким образом, $\{x_n\}$ — ограниченная возрастающая последовательность, и поэтому по теореме 8.1 существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Перейдем в равенстве $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ к пределу при $n \rightarrow \infty$. Поскольку последовательность $\{x_{n+1}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$.

Поэтому для нахождения a получим уравнение $a^2 = 2 + a$, откуда $a = -1$ или $a = 2$. Заметим, что при любом $n \in \mathbb{N}$ $x_n > 1$ и поэтому $a \geq 1$. Таким образом, окончательно имеем $a = 2$. ◁

Пример 8.4. Доказать, что последовательность $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел, и найти его.

▷ Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{n+1}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Имеем

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ отличается от последовательности $\{x_{n+1}\}$ одним членом. Поэтому (см. теор. упр. 2в) из п. 2.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = e^{-1}. \quad \triangleleft$$

Пример 8.5. Доказать, что для любого $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{n}{a^n} = 0$.

▷ Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, так как $x_n > 0$ для любого n . Докажем, что, начиная с некоторого номера, $\{x_n\}$ является убывающей. Рассмотрим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1) \cdot a}{a^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Решив относительно n неравенство $\frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, получим $n > \frac{1}{a-1}$. Следовательно, при любом $n \in \mathbb{R}$ и $n > \frac{1}{a-1}$ выполняется неравенство $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Поэтому, начиная с номера

$n = \left[\frac{1}{a-1}\right] + 1$, $\{x_n\}$ — убывающая последовательность. Отсюда, используя утверждение теоретического упражнения 1 из п. 8.2, получаем, что $\{x_n\}$ сходится. Пусть $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Перейдем к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n.$$

Получим $L = \frac{1}{a} \cdot L$, т. е. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. ◁

8.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$:

$$8.1. \quad x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$8.2. \quad x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n};$$

Найдите предел последовательности $\{x_n\}$:

$$8.3. \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}; \quad 8.4. \quad x_n = \left(\frac{4^n + 1}{4^n}\right)^{4^n};$$

$$8.5. \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; \quad 8.6. \quad x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и найдите его.

$$8.7. \quad x_n = \frac{2^n}{n!}; \quad 8.8. \quad x_n = \frac{n^2}{6^n}; \quad 8.9. \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}.$$

$$8.10. \quad \text{Докажите, что для любого } a > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a^n}{n!} = 0.$$

9. Критерий Коши

9.1. Основные понятия и теоремы. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* последовательностью, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ и любого $m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Кратко это условие записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Можно дать следующую равносильную формулировку условия Коши:

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ и для любого натурального p выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Краткая запись этой формулировки:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 9.1 (критерий Коши). *Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ является фундаментальной.*

9.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения:

- 1). Фундаментальная последовательность ограничена.
- 2). Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальна.
- 3). Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то $\{x_n\}$ сходится.
- 4). У фундаментальной последовательности любая подпоследовательность фундаментальна.
- 5). Постройте отрицание условия Коши и с его помощью сформулируйте критерий расходимости последовательности.

9.3. Примеры решения задач.

Пример 9.1. Доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

▷ В силу критерия Коши достаточно доказать, что $\{x_n\}$ фундаментальна. Имеем

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^n = 0$, получаем: для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n > N$ и всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < 1/2^n < \varepsilon.$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и поэтому сходится. $\triangleleft$

Пример 9.2. Доказать расходимость последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

▷ Из критерия Коши следует, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad \exists m > N \quad |x_n - x_m| \geq \varepsilon.$$

Оценим $|x_{2n} - x_n|$. Имеем

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $\varepsilon = 1/2$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $n = k+1$ и $m = 2(k+1)$. Тогда

$$|x_m - x_n| = |x_{2(k+1)} - x_{k+1}| \geq \frac{1}{2}.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной, и поэтому она расходится. $\triangleleft$

9.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$:

$$9.1. \quad x_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!};$$

$$9.2. \quad x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot (n+1)}.$$

Докажите расходимость последовательности $\{x_n\}$:

$$9.3. \quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$9.4. \quad x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Понятие предела функции (по Коши)

1.1. Основные понятия и теоремы.

Окрестностью, или δ -окрестностью $U_\delta(a)$ точки a вещественной прямой $\mathbb{R}$ называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ ($\delta > 0$), т. е. интервал $(a - \delta, a + \delta)$.

Проколотой окрестностью, или *проколотой δ -окрестностью* $\mathring{U}_\delta(a)$ точки a называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ ($\delta > 0$), т. е. объединение интервалов $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ в точке a* (при $x \rightarrow a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Правой полуокрестностью $\mathring{U}_\delta(a + 0)$ точки a называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$ ($\delta > 0$), т. е. интервал $(a, a + \delta)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ в точке a справа* (при $x \rightarrow a + 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \mathring{U}_\delta(a + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначения: $b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a + 0)$ при $a \neq 0$ и $b = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0 + 0)$ при $a = 0$.

Левой полуокрестностью $\mathring{U}_\delta(a - 0)$ точки a называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - a < 0$ ($\delta > 0$), т. е. интервал $(a - \delta, a)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ в точке a слева* (при $x \rightarrow a - 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначения: $b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a - 0)$ при $a \neq 0$ и $b = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(0 - 0)$ при $a = 0$.

Пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow a + 0$ и при $x \rightarrow a - 0$ называются *односторонними пределами*.

Проколотой окрестностью, или *проколотой δ -окрестностью $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ бесконечно удаленной точки* называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1/\delta$ ($\delta > 0$), т. е. объединение интервалов $(-\infty, -1/\delta) \cup (1/\delta, +\infty)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Правой полуокрестностью $\overset{\circ}{U}_\delta(-\infty)$ бесконечно удаленной точки называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $x < -1/\delta$ ($\delta > 0$), т. е. интервал $(-\infty, -1/\delta)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(-\infty)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Левой полуокрестностью $\overset{\circ}{U}_\delta(+\infty)$ бесконечно удаленной точки называется множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $x > 1/\delta$ ($\delta > 0$), т. е. интервал $(1/\delta, +\infty)$.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+\infty)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ называются *пределами на бесконечности*, причем пределы при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ называются *односторонними пределами на бесконечности*.

Заметим, что неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ равносильно условию $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

Пусть w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$). Тогда можно сформулировать определение предела в общем случае.

Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow w$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(b)$. Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow w} f(x)$.

Теорема 1.1 (единственность предела функции). *Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b_1$ и $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b_2$, то $b_1 = b_2$.*

Теорема 1.2 (локальная ограниченность функции, имеющей предел). *Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b$, то существует $\delta > 0$ такое, что на множестве $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$ функция $f(x)$ ограничена.*

1.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow w} |f(x)| = |b|$. Верно ли обратное утверждение?

2). Пусть w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0\}$ ($a \in \mathbb{R}$). Докажите, что если существуют $\delta > 0$, $\lambda > 0$ такие, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| \leq \lambda|x - a|$, то $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b$.

3). Докажите, что если существует $\lim_{x \rightarrow w} f(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любых $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (необходимое условие Коши).

1.3. Примеры решения задач.

Найти предел функции или доказать, что он не существует.

Пример 1.1. $\lim_{x \rightarrow a} c$ ($a, c \in \mathbb{R}$).

▷ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(x) = c$ — постоянная, то при любом $x \in \mathbb{R}$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Поэтому в данном случае в качестве $\delta > 0$, участвующего в определении предела, можно взять любое положительное число, например, $\delta = 1$. Итак, при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ($a, c \in \mathbb{R}$). $\triangleleft$

Пример 1.2. $\lim_{x \rightarrow a} x$ ($a \in \mathbb{R}$).

▷ Положим $f(x) = x$ и возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. В данном случае при любом $x \in \mathbb{R}$ разность значений функции $f(x) - f(a)$ равна разности значений аргумента $x - a$, поэтому в качестве $\delta > 0$ можно принять $\delta = \varepsilon$. Тогда при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ будем иметь $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ ($a \in \mathbb{R}$). $\triangleleft$

Пример 1.3. $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha$ ($\alpha > 0$).

▷ Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0$ ($\alpha > 0$). Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Подберем такое $\delta > 0$, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$, т. е. при $|x| < \delta$ выполнялось условие $|f(x)| = |x|^\alpha < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $|x|^\alpha < \varepsilon$. Имеем:

$$\begin{aligned} |x|^\alpha < \varepsilon &\iff e^{\alpha \ln |x|} < e^{\ln \varepsilon} \iff \alpha \ln |x| < \ln \varepsilon \iff \\ &\iff \ln |x| < \frac{\ln \varepsilon}{\alpha} \iff |x| < \varepsilon^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что можно в качестве искомого δ принять $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$. При решении неравенства мы пользовались тем, что функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ являются возрастающими. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0$ ($\alpha > 0$). $\triangleleft$

Пример 1.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} c/x$ ($c \neq 0$).

▷ Положим $f(x) = c/x$. Заметим, что при возрастании x по абсолютной величине значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к нулю. Естественнo предположить, что $\lim_{x \rightarrow \infty} c/x = 0$. Докажем справедливость нашей гипотезы. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Подберем такое $\delta > 0$, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$, т. е. при $|x| > 1/\delta$ выполнялось условие

$|f(x)| = |c/x| < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $|c/x| < \varepsilon$. Имеем:

$$\left| \frac{c}{x} \right| < \varepsilon \iff \frac{|c|}{|x|} < \varepsilon \iff |x| > \frac{|c|}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что можно в качестве искомого δ принять $\delta = \varepsilon/|c|$. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$. $\triangleleft$

Пример 1.5. $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x$.

$\triangleright$ Положим $f(x) = \ln x$. Заметим, что при любом $\delta > 0$ функция $\ln x$ не ограничена на интервале $(0, \delta)$, т. е. в правой полукрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(+0)$ точки $x = 0$. Действительно, возьмем произвольное число $M > 0$ и укажем число $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$ такое, что $|f(x)| > M$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\delta < 1$. Учитывая, что $\ln x < 0$ при $x \in (0, 1)$, имеем $|\ln x| = -\ln x$. Решаем неравенство:

$$-\ln x > M \iff \ln x < -M \iff 0 < x < e^{-M}.$$

Таким образом, взяв число $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$, удовлетворяющее условию $x < e^{-M}$, получим $|f(x)| > M$. Итак, доказано, что при любом $\delta > 0$ функция $y = \ln x$ не ограничена на множестве $\overset{\circ}{U}_\delta(+0)$. Отсюда на основании теоремы о локальной ограниченности функции, имеющей предел, заключаем, что $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x$ не существует. $\triangleleft$

Пример 1.6. $\lim_{x \rightarrow 0} (|x|/x)$.

$\triangleright$ По определению модуля имеем: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Заметим, что в данном случае необходимое условие Коши (упражнение 1.3) не выполняется. Действительно, положим $\varepsilon = 1$. При любом $\delta > 0$ взяв $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$, получим $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 > \varepsilon$. Итак, установлено, что условие Коши нарушается и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} (|x|/x)$ не существует. $\triangleleft$

Доказать равенство.

Пример 1.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$.

▷ Поскольку область определения функции $f(x) = 1/(1+x)$ не содержит точку $x = -1$, то мы будем рассматривать $f(x)$ на промежутке $(-1, 1)$. Согласно определению предела, надо показать, что при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $|x| < \delta$ будет выполняться неравенство $\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon$. Будем предполагать, что $\varepsilon < 1$. Это не ограничивает общность, так как если неравенство $\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon$ выполняется при $\varepsilon = 1/2$, то, тем более, при $\varepsilon = 1$. Решим неравенство. Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon \iff \\ \iff & -\varepsilon < \frac{1}{1+x} - 1 < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \frac{1}{1+x} < 1 + \varepsilon \iff \\ \iff & \begin{cases} 1+x > 1/(1+\varepsilon) \\ 1+x < 1/(1-\varepsilon) \end{cases} \iff -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, то $\left(-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \subset \left(-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$ и, полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, получаем, что при $x \in (-\delta, \delta)$ выполняется неравенство $\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$. ◁

Пример 1.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$.

▷ Рассмотрим и оценим сверху абсолютную величину разности $f(x) - b$. Имеем:

$$|f(x) - b| = \left| \frac{1}{1+|x|} - 1 \right| = \frac{|x|}{1+|x|} \leq |x|.$$

Отсюда, пользуясь утверждением теоретического упражнения 2 из п. 1.2, заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$. ◁

Пример 1.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{x} = 0$.

▷ Область определения функции $f(x) = \frac{|x|^3}{x}$ есть множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, и в любой проколотой δ -окрестности точки $x = 0$

имеем $f(x) = x^2$, причем при $|x| < 1$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq |x|$. Применяя утверждение теоретического упражнения 2, п. 1.2, заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{x} = 0$. $\triangleleft$

Пример 1.10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ ($a > 0$).

$\triangleright$ Рассмотрим разность $f(x) - b = \sqrt{x} - \sqrt{a}$ и преобразуем ее, умножив и разделив на сопряженное иррациональное выражение $\sqrt{x} + \sqrt{a}$. Получим:

$$\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Пользуясь полученным выражением и учитывая, что $\sqrt{x} \geq 0$ при любом $x \geq 0$, оценим сверху абсолютную величину функции $\sqrt{x} - \sqrt{a}$. Имеем:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Из полученного неравенства следует, что $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ (см. теор. упр. 2, п. 1.2). $\triangleleft$

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите предел функции или докажите, что он не существует.

1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} c$ ($c \in \mathbb{R}$);

1.2. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 3)$;

1.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x}$;

1.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 1}$;

1.5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x - 1}$;

1.6. $\lim_{x \rightarrow a} (|x - a| / (x - a))$.

Докажите, что:

1.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha}{x} = 0$ ($\alpha > 1$);

1.8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|^3}{(x - 1)} = 0$;

1.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x} = 1$;

1.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a + |x|} = \frac{1}{a}$ ($a > 0$).

2. Переход к пределу в неравенствах

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1 (о трех функциях). Пусть функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$, где $\delta > 0$, а w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), и выполнены условия:

$$a) \lim_{x \rightarrow w} f(x) = \lim_{x \rightarrow w} g(x) = b,$$

b) при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow w} h(x)$ и $\lim_{x \rightarrow w} h(x) = b$.

Теорема 2.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$, где $\delta_0 > 0$, а w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), и выполнены условия:

$$a) \lim_{x \rightarrow w} f(x) = a; \quad b) \lim_{x \rightarrow w} g(x) = b; \quad c) a < b.$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

Теорема 2.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$, где $\delta_0 > 0$, а w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), и выполнены условия:

$$a) \lim_{x \rightarrow w} f(x) = a; \quad b) \lim_{x \rightarrow w} g(x) = b; \quad c) \text{ существует } \delta > 0$$

такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$.

Тогда $a \leq b$.

2.2. Теоретические упражнения.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$, где $\delta_0 > 0$, а w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$). Докажите, что:

- 1). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) < b$;
- 2). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a > b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) > b$;
- 3). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \leq b$, то $a \leq b$;
- 4). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \geq b$, то $a \geq b$.

Докажите или опровергните данные утверждения:

- 5). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) < b$, то $a < b$;
- 6). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) > b$, то $a > b$.
- 7). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a \neq 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что функция $g(x) = 1/f(x)$ ограничена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$.

2.3. Примеры решения задач.

Доказать равенство.

Пример 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha}{1+x^2} = 0$ ($\alpha > 0$).

▷ Заметим, что при любом $x \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{|x|^\alpha}{1+x^2} < |x|^\alpha.$$

Положим $f(x) = 0$, $h(x) = \frac{|x|^\alpha}{1+x^2}$, $g(x) = |x|^\alpha$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (примеры 1.1 и 1.3), то функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о трех функциях. Применяя эту теорему, получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha}{1+x^2} = 0 \quad (\alpha > 0). \quad \triangleleft$$

Пример 2.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$.

▷ Заметим, что при любом $x > 0$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{x}.$$

Положим $f(x) = 0$, $h(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (пример 1.4), то функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1 о трех функциях. Применяя эту теорему, получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 2.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

▷ Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, умножив и разделив ее на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{x^2+1} + x)$. Имеем

$$h(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

При $x > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \leq \frac{1}{x}$. Положим $f(x) = 0$ и $g(x) = 1/x$. Поскольку функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$, то по теореме о трех функциях заключаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$

▷ Положим $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Заметим, что $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Оценим функцию $h(x)$ снизу:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+2|x|+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+|x|)^2}} = \frac{1}{1+|x|}$$

при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Положим $f(x) = 1/(1+|x|)$, $g(x) = 1$. Поскольку функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} 1/(1+|x|) = 1$, то по теореме о трех функциях заключаем,

$$\text{что } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1. \quad \triangleleft$$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите, что:

$$2.1. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{1+x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0);$$

$$2.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \quad (a > 0);$$

$$2.3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0; \quad 2.4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1;$$

$$2.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1;$$

$$2.6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = 1.$$

3. Бесконечно малые функции

3.1. Основные понятия и теоремы. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = 0$.

Теорема 3.1 (произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Пусть функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой

при $x \rightarrow w$, а функция $f(x)$ определена и ограничена в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$ ($\delta > 0$). Тогда $\beta(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow w$.

Теорема 3.2 (арифметические операции над бесконечно малыми функциями). Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow w$. Тогда функции $\alpha(x) \pm \beta(x)$, $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $\lambda\alpha(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) также являются бесконечно малыми при $x \rightarrow w$.

Теорема 3.3 (необходимое и достаточное условие существования предела). Функция $f(x)$ имеет предел a при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - a$ является бесконечно малой при $x \rightarrow w$.

3.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (определение бесконечно малой функции на языке « ε - δ »).

2). Функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда функция $\beta(x) = |\alpha(x)|$ является бесконечно малой при $x \rightarrow w$.

3). Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow w$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow w$.

4). Пусть функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow w$, а $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a \neq 0$. Тогда функция $\beta(x) = \alpha(x)/f(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow w$.

5). Пусть $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, причем $n < m$. Тогда $R(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$.

3.3. Примеры решения задач.

Пользуясь определением бесконечно малой функции на языке « ε - δ », доказать, что функция является бесконечно малой.

Пример 3.1. $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \rightarrow +0$.

▷ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Подберем такое $\delta > 0$, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$, т. е. при $0 < x < \delta$ выполнялось условие $|f(x)| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $\sqrt{x} < \varepsilon$. Имеем

$$\sqrt{x} < \varepsilon \iff 0 < x < \varepsilon^2.$$

Полагая $\delta = \varepsilon^{1/a}$, получаем, что при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0$. ◁

Пример 3.2. $f(x) = 1/x^\alpha$ ($\alpha > 0$) при $x \rightarrow +\infty$.

▷ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+\infty)$, т. е. при $x > 1/\delta$ выполнялось условие $|f(x)| = 1/x^\alpha < \varepsilon$. Решим неравенство $1/x^\alpha < \varepsilon$. В силу $1/x^\alpha > 0$ имеем

$$1/x^\alpha < \varepsilon \iff x^\alpha > 1/\varepsilon \iff x > (1/\varepsilon)^{1/\alpha}.$$

Полагая $\delta = (1/\varepsilon)^2$, получаем, что при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+\infty)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^\alpha = 0$. ◁

Пример 3.3. $f(x) = a^x$ ($a > 1$) при $x \rightarrow -\infty$.

▷ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(-\infty)$, т. е. при $x < -1/\delta$ выполнялось условие $a^x < \varepsilon$. Решим это неравенство, пользуясь основным логарифмическим тождеством и учитывая, что при $a > 1$ функция $f(x) = a^x$ возрастает. Имеем

$$a^x < \varepsilon \iff a^x < a^{\log_a \varepsilon} \iff x < \log_a \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon < 1$. Это не ограничивает общность, так как если неравенство $a^x < \varepsilon$ выполняется при $\varepsilon = 1/2$, то, тем более, при $\varepsilon \geq 1$. Тогда при $a > 1$ будет $\log_a \varepsilon < 0$. Полагая $\delta = -1/(\log_a \varepsilon)$, получаем, что при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(-\infty)$ выполняется неравенство $a^x < \varepsilon$. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ при $a > 1$. ◁

Пример 3.4. $f(x) = \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

▷ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Используя неравенство $|\sin x| \leq |x|$ и полагая $\delta = \varepsilon$, получаем, что при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$ выполняется неравенство $|\sin x| \leq |x| < \varepsilon$. Тем самым доказано, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, а это означает, что $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в нуле. ◁

Пользуясь свойствами арифметических операций над бесконечно малыми функциями, доказать, что функция является бесконечно малой.

Пример 3.5. $f(x) = 4(1 - x)^2$ при $x \rightarrow 1$.

▷ Положим $\alpha(x) = 1 - x$. Функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, так как для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| = |x - 1| < \varepsilon$ при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(1)$, где $\delta = \varepsilon$. Поэтому функция $\beta(x) = \alpha(x) \cdot \alpha(x)$ есть бесконечно малая как произведение двух бесконечно малых функций, а $f(x)$ — бесконечно малая как произведение бесконечно малой функции $\beta(x)$ на число $\lambda = 4$ (теорема 3.2). ◁

Пример 3.6. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$.

▷ По теореме 3.1 функция $f(x) = \sin x/x$ является бесконечно малой как произведение ограниченной функции $y = \sin x$ на функцию $\alpha(x) = 1/x$, бесконечно малую при $x \rightarrow +\infty$ (пример 3.2). ◁

Пример 3.7. $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) при $x \rightarrow +0$.

▷ Функция $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) есть бесконечно малая при $x \rightarrow 0$ как произведение конечного числа бесконечно малых функций $\alpha(x) = x$ (см. теор. упр. 3, п. 3.2). ◁

Пример 3.8. $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

▷ Вначале докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Для этого рассмотрим разность $\cos x - 1$ и оценим ее сверху по модулю, пользуясь неравенством $|\sin x| \leq |x|$. Имеем

$$|\cos x - 1| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда следует, что при $|x| < 1$ выполняется неравенство $|\cos x - 1| \leq |x|/2$. Применяя утверждение теоретического упражнения 2 из п. 3.2, заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Теперь

докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$. Заметим, что функция $\operatorname{tg} x$ есть частное от деления функции $y = \sin x$, бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ (пример 3.4), на функцию $y = \cos x$, предел которой при $x \rightarrow 0$ отличен от нуля. Пользуясь утверждением теоретического упражнения 4 из п. 3.2, получаем, что $y = \operatorname{tg} x$ — бесконечно малая при $x \rightarrow 0$. $\triangleleft$

Пользуясь необходимым и достаточным условием существования предела, доказать, что:

Пример 3.9. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a > 0$).

$\triangleright$ Положим $\alpha(x) = x^n - a^n$ и покажем, что функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$. Для этого преобразуем функцию $\alpha(x)$, пользуясь формулой сокращенного умножения $t^n - 1 = (t - 1)(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1})$ при $t = x/a$. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= a^n \left(\frac{x^n}{a^n} - 1 \right) = a^n \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} \right) = \\ &= a^{n-1} (x - a) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta(x) = a^{n-1} (x - a), \quad \gamma(x) = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Тогда $\alpha(x) = \beta(x) \cdot \gamma(x)$. Положим $\delta = a/2$ и покажем, что $\gamma(x)$ ограничена в окрестности $U_\delta(a)$, т. е. в интервале $(a/2, 3a/2)$. Действительно, $(|x|/a)^k \leq (3/2)^k \leq (3/2)^n$ ($0 \leq k \leq n$) и по неравенству треугольника $|\gamma(x)| \leq n \cdot (3/2)^n$. Функция $\beta(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$ как произведение бесконечно малой $x - a$ на число a^{n-1} . По теореме 3.1 функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой как произведение бесконечно малой функции $\beta(x)$ на ограниченную $\gamma(x)$. $\triangleleft$

Пример 3.10. $\lim_{x \rightarrow a} 1/x^n = 1/a^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a > 0$).

$\triangleright$ Обозначим $\alpha(x) = 1/x^n - 1/a^n$ и покажем, что функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$. Преобразуем функцию $\alpha(x)$, приведя дроби к общему знаменателю, и оценим ее сверху по модулю в интервале $(a/2, 3a/2)$:

$$|\alpha(x)| = \frac{|a^n - x^n|}{a^n x^n} \leq \frac{|a^n - x^n|}{a^n \cdot (a/2)^n}.$$

Положим $f(x) = 0$, $h(x) = |\alpha(x)|$, $g(x) = \frac{|a^n - x^n|}{a^n \cdot (a/2)^n}$. Эти три функции связаны неравенствами $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ (пример 3.9), то по теореме 3.3 функция $x^n - a^n$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$. Применяя теоретическое упражнение 2 из п. 3.2 и теорему 3.2 (необходимость), получаем, что $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. По теореме о трех функциях заключаем, что $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$. Отсюда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ (см. теор. упр. 2, п. 3.2) и по теореме 3.2 (достаточность) получаем требуемое утверждение. $\triangleleft$

Пример 3.11. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

$\triangleright$ Согласно теореме 3.3, достаточно доказать, что функция $f(x) = \sin x - \sin a$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(x) = \sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}.$$

Пользуясь неравенствами $|\cos x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq |x|$, оценим абсолютную величину функции $f(x)$ сверху:

$$|f(x)| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Полагая $\delta = \varepsilon$, получаем, что при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq |x-a| < \varepsilon$. Тем самым доказано, что $\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = 0$, а это означает, что $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$. $\triangleleft$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Пользуясь определением бесконечно малой функции на языке « ε - δ », докажите, что следующие функции являются бесконечно малыми:

- 3.1. $f(x) = \sqrt{x-a}$ при $x \rightarrow a+0$;
- 3.2. $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) при $x \rightarrow +0$;
- 3.3. $f(x) = a^x$ ($a < 1$) при $x \rightarrow +\infty$;

Пользуясь свойствами арифметических операций над бесконечно малыми функциями, докажите, что следующие функции являются бесконечно малыми:

$$3.4. f(x) = 1/x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ при } x \rightarrow +\infty;$$

$$3.5. f(x) = x \sin 1/x \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$3.6. f(x) = (x^2 + 5x)e^x \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$3.7. f(x) = \operatorname{ctg} x \text{ при } x \rightarrow \pi/2.$$

Пользуясь необходимым и достаточным условием существования предела, докажите, что:

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2 \quad (a > 0); \quad 3.9. \lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha.$$

4. Арифметические операции над пределами. Первый замечательный предел

4.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 4.1 (предел суммы и произведения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$ ($\delta > 0$). Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = b$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow w} (f(x) + g(x)) = a + b, \quad 2) \lim_{x \rightarrow w} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b.$$

Теорема 4.2 (предел частного). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$ ($\delta > 0$). Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Теорема 4.3 (1-й замечательный предел). Справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4.2. Теоретические упражнения.

Докажите, что:

1). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow w} (f(x) - g(x)) = a - b$ (теорема о пределе разности);

2). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = a$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \rightarrow w} \lambda f(x) = \lambda a$ (теорема о пределе произведения функции на число);

3). Если $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен степени n , то $\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a)$;

4). Если $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, причем $Q(a) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a)$.

4.3. Примеры решения задач.

Найти пределы дробно-рациональных функций.

Пример 4.1. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ а) при $x \rightarrow 1$; б) при $x \rightarrow 3$.

▷ Функция $f(x)$ есть частное от деления функции $\alpha(x) = x^2 - 5x + 6$ на функцию $\beta(x) = x - 3$. Определим, можно ли для вычисления данного предела применить теорему о пределе частного. Для этого необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя, если они существуют, и проверить, не равен ли нулю предел знаменателя.

а). Вычислим пределы числителя и знаменателя дроби при $x \rightarrow 1$, пользуясь теоремой 4.1 и теоретическими упражнениями 1 и 2 из п. 4.2. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6 = \\ &= 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 2; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = 1 - 3 = -2.$$

Итак, условия теоремы 4.1 выполнены: пределы числителя и знаменателя существуют, причем предел знаменателя не равен нулю. Применяя эту теорему, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

б). Вычислим пределы числителя и знаменателя дроби при $x \rightarrow 3$. Имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - 5 \lim_{x \rightarrow 3} x + 6 = \\ &= 3 \cdot 3 - 5 \cdot 3 + 6 = 0;\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0.$$

Предел знаменателя в данном случае равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя. Преобразуем функцию $f(x)$, разложив числитель на множители: $(x^2 - 5x + 6)/(x - 3) = (x - 2)(x - 3)/(x - 3)$. Итак, при $x \neq 3$, т. е. в любой проколотой окрестности точки $x = 3$ справедливо равенство $f(x) = x - 2$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = \lim_{x \rightarrow 3} x - 2 = 3 - 2 = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 4.2. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x + 4}$ а) при $x \rightarrow 2$; б) при $x \rightarrow \infty$.

$\triangleright$ а). Вычислим пределы числителя и знаменателя дроби при $x \rightarrow 2$, применяя теоремы о пределе суммы, разности и произведения:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + 6 = \\ &= 2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0;\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 6x + 4) = 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 0.$$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя. Преобразуем функцию $f(x)$, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x + 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{2(x - 1)(x - 2)}.$$

При $x \in D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ справедливо равенство $f(x) = \frac{x - 3}{2(x - 1)}$. В частности, это равенство верно для лю-

бого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(2)$ при $\delta < 1$.

Выясним теперь, можно ли применить к преобразованной функции теорему о пределе частного. Вычисляем пределы числителя и знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 2} 2(x - 1) = 2 \cdot (2 - 1) = 2.$$

Поскольку предел знаменателя отличен от нуля, то условия теоремы 4.2 выполнены, и $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1/2$.

б). Докажем, что пределы числителя и знаменателя дроби при $x \rightarrow \infty$ не существуют. Для этого установим, что функции $\alpha(x) = x^2 - 5x + 6$ и $\beta(x) = 2x^2 - 6x + 4$ не ограничены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ при любом $\delta > 0$. По теореме 1.2 о локальной ограниченности функции, имеющей предел, отсюда будет следовать, что пределы $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow \infty$ не существуют. Оценим снизу модуль функции $\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| &= |x^2 - 5x + 6| = |(x - 5/2)^2 - 1/4| \geq \\ &\geq (x - 5/2)^2 - 1/4 = |x - 5/2|^2 - 1/4. \end{aligned}$$

Возьмем произвольное число $M > 0$ и решим неравенство $|x - 5/2|^2 - 1/4 > M$. Имеем:

$$\begin{aligned} |x - 5/2|^2 - 1/4 > M &\iff |x - 5/2|^2 > M + 1/4 \iff \\ &\iff |x - 5/2| > \sqrt{M + 1/4} \iff x \in A_M, \end{aligned}$$

$$\text{где } A_M = (-\infty, 5/2 - \sqrt{M + 1/4}) \cup (5/2 + \sqrt{M + 1/4}, +\infty).$$

При любом $\delta > 0$ множества A_M и $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ имеют непустое пересечение. Следовательно, для любого $M > 0$ в любой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ существует x такое, что $|\alpha(x)| > M$. Таким образом, неограниченность $\alpha(x)$ на множестве $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ при любом $\delta > 0$ доказана. Аналогичные рассуждения показывают неограниченность функции $\beta(x)$. Итак, функция $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ не удовлетворяет условиям теоремы 4.1, поэтому непосредственное использование теоремы о пределе частного невозможно. Для вычисления предела используем следующий прием. В числителе и знаменателе дроби вынесем x^2 за скобки и сократим на x^2 . Это можно сделать при любом $x \neq 0$, т. е. при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$. Получим

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x + 4} = \frac{x^2(1 - 5/x + 6/x^2)}{x^2(2 - 6/x + 4/x^2)} = \frac{1 - 5/x + 6/x^2}{2 - 6/x + 4/x^2}.$$

Вычислим пределы числителя и знаменателя, преобразованной функции, учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} c/x = 0$ при $c \neq 0$ (пример 1.4):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 5/x + 6/x^2) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 6/x + 4/x^2) = 2.$$

Поскольку предел знаменателя отличен от нуля, то условия теоремы 4.1 выполнены, и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1/2$. $\triangleleft$

Найти предел функции.

Пример 4.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

▷ Вычислим данный предел, пользуясь 1-м замечательным пределом, непрерывностью функции $y = \cos x$ и теоремой о пределе произведения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 4.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

▷ Данный предел найдем, используя определение функции $\operatorname{tg} x$, а также непрерывность функции $y = \cos x$ и 1-й замечательный предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \\ &= \frac{1}{\cos 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 4.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

▷ Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, следующим образом:

$$\frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2.$$

Применяя теоремы о пределе произведения и 1-м замечательном пределе, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2. \quad \triangleleft$$

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите пределы дробно-рациональных функций:

$$4.1. \quad f(x) = \frac{x^2 - 13x + 12}{x - 1} \quad \text{a) при } x \rightarrow 1; \quad \text{b) при } x \rightarrow 3;$$

$$4.2. \quad f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 12}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{a) при } x \rightarrow -3; \quad \text{b) при } x \rightarrow \infty;$$

4.3. Докажите, что если

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$$

— многочлены степени n , то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0}{b_0}$.

Найдите пределы функций:

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x; \quad 4.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3};$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x}; \quad 4.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \cdot (x - \sin 2x)}.$$

5. Непрерывность функции в точке

5.1. Основные понятия и теоремы. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если она определена в окрестности $U_\delta(a)$ точки a и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Теорема 5.1 (арифметические операции над непрерывными функциями). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a . Тогда

- 1) функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ непрерывны в точке a ;
- 2) функция $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке a ;
- 3) если $g(a) \neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке a .

Теорема 5.2 (непрерывность основных элементарных функций). Если основная элементарная функция $f(x)$ определена в окрестности $U_\delta(a)$ точки a , то она непрерывна в точке a .

5.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

- 1). Функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x = a$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (определение непрерывности функции в точке на языке « ε - δ »).

2). (Теорема о локальной ограниченности непрерывной функции.) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a , то существует $\delta > 0$ такое, что в окрестности $U_\delta(a)$ функция $f(x)$ ограничена.

3). (Теорема о сохранении знака непрерывной функции.) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in U_\delta(a)$ выполнено неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

4). Все многочлены непрерывны в каждой точке $a \in \mathbb{R}$.

5). Если $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, и $Q_m(a) \neq 0$, то $f(x)$ непрерывна в точке a .

5.3. Примеры решения задач.

Исследовать непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Пример 5.1. $f(x) = 1/(x - a)$ $a \in \mathbb{R}$.

▷ Функция $f(x) = 1/(x - a)$ не является непрерывной в точке $x = a$, так как эта точка не принадлежит области определения функции. ◁

Пример 5.2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $a = 0$.

▷ Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ определяется равенством:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ определена в любой окрестности точки $x = 0$. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует, пользуясь необходимым условием Коши (см. теор. упр. 3, п. 1.2). Положим $\varepsilon = 1$.

При любом $\delta > 0$, взяв $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$, получим $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 > \varepsilon$. Итак, установлено, что условие Коши нарушается. Следовательно, функция $f(x)$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$ и поэтому не является непрерывной в точке $x = 0$. ◁

Пример 5.3. $f(x) = \sqrt{x-a}$ $a \in \mathbb{R}$.

▷ Областью определения функции $f(x) = \sqrt{x-a}$ является полупрямая $[a, +\infty)$. Следовательно, не существует такой окрестности точки $x = a$, в которой функция $f(x)$ определена. Поэтому $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = a$. ◁

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность.

Пример 5.4. $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$.

▷ Функция $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$ есть рациональная дробь. Корнями знаменателя x^2-4 являются числа $x = \pm 2$. Во всех точках $x \neq \pm 2$ функция $f(x)$ непрерывна (см. теор. упр. 5, п. 5.2), а в точках $x = \pm 2$ не является непрерывной, так как не определена. ◁

Пример 5.5. $f(x) = \ln x$.

▷ Функция $f(x) = \ln x$ является одной из простейших элементарных функций. Областью определения этой функции является множество $D(f) = (0, +\infty)$. Каждая точка этого множества имеет окрестность, целиком принадлежащую множеству, т.е. в которой функция $y = \ln x$ определена. По теореме 5.2 отсюда следует, что функция $y = \ln x$ непрерывна в каждой точке полупрямой $(0, +\infty)$. ◁

5.4. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте непрерывность функций $f(x)$ в точке $x = a$:

$$5.1. f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, \quad a = 1; \quad 5.2. f(x) = \ln |x|, \quad a = 0;$$

$$5.3. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases} \quad a = 0.$$

Исследуйте функции $f(x)$ на непрерывность:

$$5.4. f(x) = [x]; \quad 5.5. f(x) = \frac{x-1}{x^3-3x+2}; \quad 5.6. f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

6. Односторонние пределы и непрерывность. Пределы монотонных функций

6.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 6.1 (предел функции в точке и односторонние пределы). *Функция $f(x)$ имеет предел в точке $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0);$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0);$
- 3) $f(a+0) = f(a-0).$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a справа*, если она определена на промежутке $[a, a + \varepsilon)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = f(a).$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a слева*, если она определена на промежутке $(a - \varepsilon, a]$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = f(a).$

Теорема 6.2 (непрерывность в точке и односторонняя непрерывность). *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в точке a слева и справа.*

Теорема 6.3 (критерий непрерывности функции в точке). *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0);$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0);$
- 3) $f(a+0) = f(a-0) = f(a).$

Теорема 6.4 (пределы монотонной ограниченной функции). *Пусть функция $f(x)$ возрастает (убывает) и ограничена на промежутке (a, b) , где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$. Тогда существуют пределы:*

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x). \quad (6.1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x). \right) \quad (6.2)$$

Теорема 6.5 (односторонние пределы монотонной функции). Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке (a, b) , где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$, и $c \in (a, b)$. Тогда

$$1) \exists \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0); 2) \exists \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0).$$

6.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1) \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1; 2) \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_2; 3) b_1 = b_2.$$

2). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа, то существует $\delta > 0$ такое, что в промежутке $[a, a + \delta)$ функция $f(x)$ ограничена.

3). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева, то существует $\delta > 0$ такое, что в промежутке $(a - \delta, a]$ функция $f(x)$ ограничена.

4). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in [a, a + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

5). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in (a - \delta, a]$ выполнено неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

6.3. Примеры решения задач.

Пример 6.1. Найти пределы функции $f(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{1 + x^2}$ при $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$, $x \rightarrow 0$.

▷ По определению функции $y = \operatorname{sgn} x$ имеем

$$f(x) = \begin{cases} 1/(1 + x^2) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1/(1 + x^2) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$ имеем $f(x) = 1/(1+x^2)$ и в силу непрерывности элементарной функции $1/(1+x^2)$ в точке $x = 0$ заключаем, что

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

При $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(-0)$ имеем $f(x) = -1/(1+x^2)$ и в силу непрерывности элементарной функции $-1/(1+x^2)$ в точке $x = 0$ заключаем, что

$$\begin{aligned} f(-0) &= \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{1+0^2} = -1. \end{aligned}$$

Итак, $f(+0) \neq f(-0)$. Следовательно, по теореме 6.1 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует. $\triangleleft$

Исследовать непрерывность и одностороннюю непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Пример 6.2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{при } x \leq 1, \\ 3x - 5 & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad a = 1.$

$\triangleright$ При $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(1-0)$ имеем $f(x) = -2x + 3$ и в силу непрерывности элементарной функции $-2x + 3$ в точке $x = 1$ заключаем, что

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x + 3) = 1.$$

Поскольку в точке $x = 1$ функция $f(x)$ определена формулой $f(x) = -2x + 3$, то $f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1 = f(1-0)$ и, следовательно, $f(x)$ непрерывна слева. При $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(1+0)$ имеем $f(x) = 3x - 5$ и в силу непрерывности элементарной функции $3x - 5$ в точке $x = 1$ заключаем, что

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 5) = -2.$$

Итак, $f(1+0) \neq f(1)$. Следовательно, $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = 1$ справа и по теореме 6.2 в этой точке не является непрерывной. $\triangleleft$

Пример 6.3. $f(x) = \sqrt{|x-2|}$; $a = 2$.

▷ Данная функция определена на всей числовой прямой, причем по определению модуля

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{при } x \geq 2, \\ \sqrt{2-x} & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x = 2$ и воспользуемся критерием непрерывности (теорема 6.3). Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{x-2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \sqrt{2-x} = 0.$$

Получаем $f(2+0) = f(2-0) = f(2) = 0$ и по теореме 6.3 заключаем, что данная функция непрерывна в точке $x = 2$ и, следовательно, непрерывна в этой точке как слева, так и справа.

◁

Пример 6.4. $f(x) = [x] = n$ при $x \in [n, n+1)$ — целая часть x ; $a = n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

▷ Положим $\delta = 1/2$. При любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(n+0)$ имеем $[x] = n$ и, следовательно,

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} f(x) = n = f(n).$$

Таким образом, функция $[x]$ непрерывна в точке $x = n$ справа. При любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(n-0)$ имеем $[x] = n-1$ и, следовательно,

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} f(x) = n-1 \neq f(n).$$

Отсюда следует, что данная функция не является непрерывной в точке $x = n$ слева. Следовательно, по теореме 6.2 функция $[x]$ не является непрерывной в точке $x = n$ при любом $n \in \mathbb{Z}$.

◁

6.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите пределы функции $f(x) = \text{при } x \rightarrow a+0, x \rightarrow a-0, x \rightarrow a$:

6.1. $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; $a = 1$;

6.2. $f(x) = 3 + \frac{1}{1+7^{1/(1-x)}}$; $a = 1$;

6.3. $f(x) = \cos(\pi/x)$; $a = 0$; 6.4. $f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}$; $a = 2$.

Исследуйте непрерывность и одностороннюю непрерывность функции $f(x)$ в данной точке $x = a$.

$$6.5. \quad f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad a = 0;$$

$$6.6. \quad f(x) = \operatorname{sgn} x; \quad a = 0;$$

$$6.7. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1}x - 1 & \text{при } x \neq -1, \\ 1 & \text{при } x = -1; \end{cases} \quad a = -1;$$

$$6.8. \quad f(x) = \{x\} = x - [x] - \text{дробная часть } x; \quad a = n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

6.9. Определите, при каком значении параметра b функция

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{при } x < 0, \\ 2b + x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$.

7. Бесконечно большие функции

7.1. Основные понятия и теоремы. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), если она определена в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$ и для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$ выполнено неравенство $|f(x)| > M$, т. е. $f(x) \in \overset{\circ}{U}_{1/M}(\infty)$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \infty$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой положительной* при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), если она определена в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$ и для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$ выполнено неравенство $f(x) > M$, т. е. $f(x) \in \overset{\circ}{U}_{1/M}(+\infty)$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = +\infty$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой отрицательной* при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), если она определена в окрестно-

сти $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(w)$ и для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$ выполнено неравенство $f(x) < -M$, т. е. $f(x) \in \overset{\circ}{U}_{1/M}(-\infty)$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = -\infty$.

Теорема 7.1 (связь между бесконечно большими и бесконечно малыми). 1). Если функция $f(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow w$ и существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \neq 0$ при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$, то функция $g(x) = 1/f(x)$ есть бесконечно большая при $x \rightarrow w$. 2). Если функция $f(x)$ есть бесконечно большая при $x \rightarrow w$, то функция $g(x) = 1/f(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow w$.

Теорема 7.2 (свойства бесконечно больших, связанные с неравенствами). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$, где $\delta > 0$, и при любом $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq |g(x)|$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = \infty$.

Теорема 7.3 (операции над ограниченной и бесконечно большой функциями). Пусть функция $f(x)$ есть бесконечно большая при $x \rightarrow w$, а $g(x)$ ограничена в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$. Тогда

- 1) $\lim_{x \rightarrow w} f(x) \pm g(x) = \infty$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow w} (g(x)/f(x)) = 0$;
- 3) если $g(x) \neq 0$ при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(w)$, то $\lim_{x \rightarrow w} (f(x)/g(x)) = \infty$.

Теорема 7.4 (произведения, содержащие бесконечно большие функции). Пусть $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \infty$. Тогда

- 1) если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow w} f(x) \cdot g(x) = \infty$;
- 2) если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} f(x) \cdot g(x) = \infty$.

Теорема 7.5 (сумма и разность бесконечно больших функций). Пусть $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = +\infty$. Тогда

- 1) если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} (f(x) + g(x)) = +\infty$;
- 2) если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} (g(x) - f(x)) = -\infty$.

7.2. Теоретические упражнения.

1). Приведите пример бесконечно большой функции, которая не является ни бесконечно большой положительной, ни бесконечно большой отрицательной.

2). Приведите пример неограниченной функции, которая не является бесконечно большой.

Докажите следующие утверждения:

3). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} (-f(x)) = -\infty$;

4). Если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} |f(x)| = +\infty$.

5). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$, где $\delta > 0$, и при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = -\infty$.

6). Пусть $g(x)$ ограничена в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(w)$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow w} (f(x) \pm g(x)) = -\infty$.

7). Пусть $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = +\infty$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow w} g(x) = b > 0$, то $\lim_{x \rightarrow w} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

7.3. Примеры решения задач.

Доказать равенство.

Пример 7.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} cx = \infty$ ($c \neq 0$).

▷ Возьмем произвольное $M > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ будет выполнено условие $|cx| > M$. Решая это неравенство, получим

$$|cx| > M \iff |c||x| > M \iff |x| > M/|c|.$$

Положим $\delta = |c|/M$. Тогда при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ будет выполнено неравенство $|cx| > M$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} cx = \infty$. $\triangleleft$

Пример 7.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ($a > 1$).

▷ Возьмем произвольное $M > 1$ и найдем $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+\infty)$ будет выполнено неравенство $a^x > M$. Условие $M > 1$ не ограничивает общности, так как если неравенство $a^x > M$ выполнено при $M > 1$, то, тем более, и при $0 < M \leq 1$. Решим это неравенство, пользуясь тем, что функция a^x при $a > 1$ возрастает на $\mathbb{R}$. Имеем:

$$a^x > M \iff a^x > a^{\log_a M} \iff x > \log_a M.$$

Положим $\delta = 1/\log_a M$. Из условий $M > 1$, $a > 1$ следует, что $\delta > 0$ и при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$ выполняется неравенство $a^x > M$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$. $\triangleleft$

Пример 7.3. $\lim_{x \rightarrow 0} c/x = \infty$ ($c \neq 0$).

▷ Функция $\alpha(x) = x$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow 0$. Поэтому функция $1/x$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$ (теорема 7.1). Отсюда по п. 1 теоремы 7.4 следует, что функция $f(x) = c/x$ также является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$. $\triangleleft$

7.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите:

$$7.1. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{c}{x} = +\infty \ (c > 0); \quad 7.2. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{c}{x} = -\infty \ (c > 0);$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \ (a < 1);$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ -\infty & \text{при } a < 1; \end{cases}$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

7.6. Докажите, что если $P_n(x)$ — многочлен степени $n > 0$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \infty; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} 1/P_n(x) = 0.$$

Пусть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ — многочлены степени n и m , $m > 0$.

Докажите:

7.7. Если $n > m$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x)/Q_m(x) = \infty; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} Q_m(x)/P_n(x) = 0;$$

7.8. Если $n > m$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x)/Q_m(x) = +\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x)/Q_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{при } m+n=2k, \\ -\infty & \text{при } m+n=2k+1. \end{cases}$$

$$7.9. \text{ Если } Q_m(a) = 0 \ (m > 0), \ P_n(a) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty.$$

8. Пределы по последовательностям (по Гейне). Второй замечательный предел

8.1. Основные понятия и теоремы. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность. Будем говорить, что последовательность x_n *стремится к пределу a слева*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n \leq a$. Обозначения: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0$ при $a \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -0$ при $a = 0$.

Будем говорить, что последовательность x_n *стремится к пределу a справа*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n \geq a$. Обозначения: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0$ при $a \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +0$ при $a = 0$.

Теорема 8.1 (равносильное определение предела — по Гейне). Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям:

1) существует $\delta > 0$, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = w$, где w — один из символов $\{a, a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$), выполнено равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Теорема 8.2 (признак «несуществования» предела функции). Пусть существуют 2 последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = w$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = w$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b_1$;
 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = b_2$; 5) $b_1 \neq b_2$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ не существует.

Теорема 8.3 (предел непрерывной функции от последовательности). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a)$.

Теорема 8.4 (2-й замечательный предел). Справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

8.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

- 1). Пусть $x_n \geq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{a}$, $p \in \mathbb{N}$.

- 2). Последовательность x_n стремится к пределу a слева тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n > n_0$ выполняется условие $x_n \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(a-0)$.

- 3). Последовательность x_n стремится к пределу a справа тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n > n_0$ выполняется условие $x_n \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(a+0)$.

- 4). (Теорема о равносильном определении бесконечно большой функции — по Гейне). Функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям:

- 1) существует $\delta > 0$, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$,
 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = w$, где w — один из символов $\{a, a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$),
 последовательность $f(x_n)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow w$.

8.3. Примеры решения задач.

Доказать равенство.

Пример 8.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 - 0.$

▷ Преобразуем общий член последовательности, выделив целую часть. Получим

$$x_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2) - 2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < 2$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 - 0.$ ◁

Пример 8.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e + 0.$

▷ Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает (см. теор. упр. 6, п. 1.2, гл. 2) и ограничена снизу, так как $x_n \geq 1$. По теореме Вейерштрасса отсюда следует, что последовательность x_n имеет предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \rightarrow \infty} x_n$, т. е. x_n стремится к своему пределу справа. Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e + 0. \quad \triangleleft$$

Пример 8.3. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(t/n) = +0$ при $t > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(t/n) = -0$ при $t < 0$.

▷ Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(t/n) = 0$, пользуясь теоремой о пределе непрерывной функции от последовательности. Условия этой теоремы выполняются: функция $y = \sin x$ непрерывна в точке $x = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} = 0$ при любом значении параметра t . Получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{t}{n} = \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \right) = \sin 0 = 0.$$

Пусть $t > 0$, тогда найдется натуральное число n_0 такое, что $t/n_0 < \pi/2$. В качестве n_0 можно взять любое целочисленное решение неравенства $n_0 > 2t/\pi$. Поскольку последовательность

t/n при $t > 0$ убывает, то при любом $n > n_0$ будет $t \in (0, \pi/2)$ и, следовательно, $\sin(t/n) > 0$. Итак, при $t > 0$ последовательность $x_n = \sin(t/n) > 0$ стремится к нулю справа.

Пусть $t < 0$, тогда найдется натуральное число n_0 такое, что $t/n_0 > -\pi/2$: в качестве n_0 возьмем любое целочисленное решение неравенства $n_0 > 2|t|/\pi$. Поскольку последовательность t/n при $t < 0$ возрастает, то при любом $n > n_0$ будет $t \in (-\pi/2, 0)$ и, $\sin(t/n) < 0$. Итак, при $t < 0$ последовательность $x_n = \sin(t/n) > 0$ стремится к нулю слева. $\triangleleft$

Пример 8.4. Доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ не стремится к своему пределу ни слева, ни справа.

$\triangleright$ Последовательность x_n сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. При этом,

$$x_n = \begin{cases} 1 + 1/n & \text{при } n = 2k; \\ 1 - 1/n & \text{при } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Таким образом, все члены последовательности с четными номерами больше, а все члены с нечетными номерами меньше, чем ее предел. Следовательно, данная последовательность не стремится к своему пределу ни слева, ни справа. $\triangleleft$

Пример 8.5. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

$\triangleright$ Воспользуемся признаком «несуществования» предела функции. Рассмотрим две сходящиеся к нулю последовательности:

$$x_n = 1/(\pi n); \quad y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n).$$

Вычислим значение функции в точках этих последовательностей:

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \pi n = 0; \quad \sin \frac{1}{y_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{y_n} = 1.$$

Поскольку пределы данной функции по двум сходящимся к нулю последовательностям не совпадают, то $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует (теорема 8.2). $\triangleleft$

Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если он существует.

Пример 8.6. $x_n = \sqrt[3]{27 + \frac{1}{n^2} - \frac{8}{n^3}}$.

▷ Представим данную последовательность в виде

$$x_n = \sqrt[3]{y_n}, \text{ где } y_n = 27 + \frac{1}{n^2} - \frac{8}{n^3}$$

и вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, учитывая непрерывность функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и пользуясь теоремой о пределе непрерывной функции от последовательности. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 27 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{y_n} = \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \sqrt[3]{27} = 3. \quad \triangleleft$$

Пример 8.7. $x_n = n \sin \frac{t}{n}$.

▷ Представим данную последовательность в виде

$$x_n = t \cdot \frac{\sin y_n}{y_n}, \text{ где } y_n = t/n.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, то из 1-го замечательного предела с учетом теоремы 8.1 следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t \cdot \frac{\sin y_n}{y_n} = t \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = t. \quad \triangleleft$$

Пример 8.8. $x_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$.

▷ Представим данную последовательность в виде

$$x_n = n(\ln(n+1) - \ln n) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln y_n,$$

где $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, и вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, учитывая непрерывность функции $f(x) = \ln x$ и пользуясь теоремой о пределе непрерывной функции от последовательности. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \ln e = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 8.9. $x_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$.

▷ Представим данную последовательность в виде

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right)^{-1/3} = y_n^{-1/3},$$

где $y_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{-3n}$.

По теореме 8.1 из 2-го замечательного предела следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{-3n} = e,$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3n}\right) = 0$. Вычислим теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, учитывая непрерывность функции $f(x) = x^{-1/3}$ в точке $x = e$ и пользуясь теоремой о пределе непрерывной функции от последовательности. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)^{-1/3} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}. \quad \triangleleft$$

8.4. Задачи для самостоятельной работы.

Докажите равенства:

$$8.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n-1} = 3 + 0; \quad 8.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{t}{n} = 1 - 0;$$

$$8.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - 0.$$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не стремится к своему пределу ни слева, ни справа:

$$8.4. \quad x_n = \frac{\cos(\pi n/2)}{n}.$$

Найдите предел последовательности $\{x_n\}$, если он существует:

$$8.5. \quad x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt{n}}. \quad 8.6. \quad x_n = \sqrt[3]{1 - n^3} + \sqrt{n};$$

Найдите пределы:

$$8.7. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+3) - \ln n); \quad 8.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n};$$

$$8.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n; \quad 8.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+2));$$

$$8.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}; \quad 8.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n/2}.$$

Докажите, что следующие пределы не существуют:

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}; \quad 8.14. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}; \quad 8.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$$

9. Предел и непрерывность сложной функции

9.1. Основные понятия и теоремы. Будем говорить, что функция $f(x)$ *стремится к пределу b слева* при $x \rightarrow w$, если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \leq b$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b - 0$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ *стремится к пределу b справа* при $x \rightarrow w$, если $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b$ и существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено неравенство $f(x) \geq b$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = b + 0$.

Теорема 9.1 (предел сложной функции).

Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1) E(f) \subset D(g); \quad 2) \lim_{x \rightarrow w_1} f(x) = w_2; \quad 3) \lim_{y \rightarrow w_2} g(y) = w;$$

4) если w_2 — один из символов $\{b, b+0, b-0\}$, то существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w_1)$ выполнено неравенство $f(x) \neq b$.

$$\text{Тогда } \exists \lim_{x \rightarrow w_1} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow w_2} g(y) = w.$$

Теорема о пределе сложной функции позволяет использовать при вычислении пределов метод замены переменной под знаком предела, который мы продемонстрируем в п. 3 на примерах.

Теорема 9.2 (предел непрерывной функции). Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $E(f) \subset D(g)$;
- 2) $g(y)$ непрерывна в точке y_0 ;
- 3) $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = y_0$.

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow w} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow w} f(x)) = g(y_0)$.

Теорема 9.3 (непрерывность сложной функции). Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $E(f) \subset D(g)$;
- 2) $f(x)$ непрерывна в точке x_0 ;
- 3) $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.

Тогда $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Теорема 9.4 (непрерывность элементарных функций). Если элементарная функция $f(x)$ определена в окрестности $U_\delta(a)$ точки a , то она непрерывна в точке a .

9.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Функция $f(x)$ стремится к пределу b слева тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено условие $f(x) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(b - 0)$.

2). Функция $f(x)$ стремится к пределу b справа тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(w)$ выполнено условие $f(x) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(b + 0)$.

9.3. Примеры решения задач.

Найти предел функции при $x \rightarrow w$ и определить, стремится ли функция к своему пределу слева или справа.

Пример 9.1. $f(x) = 2^x$ при $x \rightarrow +0$.

▷ Областью определения функции $f(x) = 2^x$ является множество $\mathbb{R}$, поэтому функция $f(x) = 2^x$, как элементарная, непрерывна в каждой точке числовой оси и, в частности, в точке $x = 0$.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +0} 2^x = \lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 2^0 = 1$. Поскольку функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает, то $2^x > 2^0 = 1$ при $x > 0$, т. е. при любом $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0)$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow +0} 2^x = 1 + 0$. $\triangleleft$

Пример 9.2. $f(x) = 2^x$ при $x \rightarrow 0$.

$\triangleright$ Поскольку функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает на всей числовой оси, то $2^x > 2^0 = 1$ при любом $x > 0$ и $2^x < 2^0 = 1$ при любом $x < 0$. Следовательно, хотя функция $f(x) = 2^x$ имеет предел, равный 1 при $x \rightarrow 0$, но она не стремится к нему ни слева, ни справа. $\triangleleft$

Пример 9.3. $f(x) = 2^x$ при $x \rightarrow -\infty$.

$\triangleright$ Поскольку функция $f(x) = 2^x$ положительна на всей числовой оси и $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ (пример 3.3), то $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = +0$. $\triangleleft$

Пример 9.4. $f(x) = 1 - x^2$ при $x \rightarrow 0$.

$\triangleright$ Поскольку $1 - x^2 < 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$, то функция $f(x) = 1 - x^2$ стремится к своему пределу слева. $\triangleleft$

Найти предел сложной функции.

Пример 9.5. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^x - 1}$.

$\triangleright$ Для вычисления данного предела воспользуемся методом замены переменной под знаком предела, основанном на применении теоремы о пределе сложной функции.

Введем новую переменную $y = 2^x$ и представим функцию $h(x)$, стоящую под знаком предела, как сложную функцию переменной x , а именно: $h(x) = g(f(x))$, где $f(x) = 2^x$, $x > 0$, $g(y) = 1/(y - 1)$. Проверим, что функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 9.1:

$$1) E(f) = (1, +\infty); D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \implies E(f) \subset D(g);$$

$$2) w_1 = +0; w_2 = \lim_{x \rightarrow +0} 2^x = 1 + 0 \text{ (пример 9.1);}$$

$$3) \lim_{y \rightarrow 1+0} \frac{1}{y - 1} = +\infty;$$

$$4) 2^x \neq 1 \text{ при } \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(+0) \text{ и при } \forall \delta > 0.$$

Применяя теорему 9.1, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^x - 1} = \lim_{y \rightarrow 1+0} \frac{1}{y - 1} = +\infty. \quad \triangleleft$$

Пример 9.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2} x}{x}$.

▷ Для вычисления данного предела воспользуемся 1-м замечательным пределом, применение которого станет возможным после замены переменной. Введем новую переменную $y = \sqrt{2} x \implies x = y/\sqrt{2}$ и представим функцию $h(x)$, стоящую под знаком предела, как сложную функцию переменной x , а именно:

$$\frac{\sin \sqrt{2} x}{x} = g(f(x)), \text{ где } f(x) = \sqrt{2} x, \ x \neq 0, \ g(y) = \frac{\sqrt{2} \sin y}{y}.$$

Проверим, что функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 9.1:

- 1) $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \ D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies E(f) \subset D(g);$
- 2) $w_1 = 0; \ w_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} x = 0;$
- 3) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin y}{y} = \sqrt{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \sqrt{2}$ (1-й замечательный предел);
- 4) $f(x) = \sqrt{2} x \neq 0$ при $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\pi/2}(0)$.

Применяя теорему 9.1, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin y}{y} = \sqrt{2}. \quad \triangleleft$$

Пример 9.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x}$.

▷ Вычисление данного предела основано на 2-м замечательном пределе. Введем новую переменную $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ и представим функцию $h(x)$, стоящую под знаком предела, в виде сложной функции:

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x} = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^7 = g(f(x)),$$

где $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $g(y) = y^7$.

Функция $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 9.2 о пределе непрерывной функции:

- 1) $E(f) \subset (0, +\infty); \ D(g) = \mathbb{R} \implies E(f) \subset D(g);$
- 2) $g(y) = y^7$ непрерывна в точке $y_0 = e$;

3) $w = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (2-й замечательный предел).

Применяя теорему 9.2, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^7 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^7 = e^7. \quad \triangleleft$$

Пример 9.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{1/(1+\sqrt{x})}$.

$\triangleright$ Функция $h(x)$, стоящая под знаком предела, является *показательно-степенной*, т.е. имеет вид $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Пределы показательно-степенной функции вычисляются методом логарифмирования, который состоит в том, что данную функцию представляют в виде $h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$ и, пользуясь непрерывностью функции e^x , применяют теорему о пределе непрерывной функции:

$$\lim_{x \rightarrow w} h(x) = \lim_{x \rightarrow w} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow w} g(x) \ln f(x)}.$$

В данном случае имеем

$$h(x) = f(x)^{g(x)}, \text{ где } f(x) = \frac{1+x}{2+x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e^L, \text{ где } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1+x}{2+x} \right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $y = \ln x$ и применяя теорему 9.2, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{2+x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2+x} \right) = \ln 1 = 0.$$

Учтем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 0$ и вычислим предел показателя степени L :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{2+x} = 0.$$

Окончательно получаем: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e^0 = 1. \quad \triangleleft$

Доказать следствие из 1-го замечательного предела.

Пример 9.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x / x = 1$.

▷ Положим $y = \arcsin x \implies x = \sin y$ и воспользуемся методом замены переменной под знаком предела:

$$w_1 = 0; \quad w_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \triangleleft$$

Доказать следствия из 2-го замечательного предела.

Пример 9.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

▷ Преобразуем функцию $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, стоящую под знаком предела:

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x}.$$

Положим $y = (1+x)^{1/x}$, $w = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ и воспользуемся непрерывностью функции $y = \ln x$. Применяя теорему 9.2, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 9.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

▷ Произведем замену переменной $y = e^x - 1 \implies \implies x = \ln(y+1)$. В силу непрерывности функции e^x имеем:

$$w = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0.$$

Пользуясь пределом, вычисленным в примере 9.10, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \triangleleft$$

Найти предел.

Пример 9.12. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

▷ Сделаем замену переменной $y = x - \pi \implies x = y + \pi$ и воспользуемся 1-м замечательным пределом. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1. \quad \triangleleft$$

Пример 9.13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

▷ Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, таким образом, чтобы можно было использовать пример 9.10:

$$\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{\ln(x/e)}{e(x/e - 1)} = \frac{\ln(x/e - 1 + 1)}{e(x/e - 1)}.$$

Введем новую переменную $y = x/e - 1$. Отсюда $w = \lim_{x \rightarrow e} y = 0$. Произведя замену переменной, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{ey} = \frac{1}{e} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \frac{1}{e}. \quad \triangleleft$$

Пример 9.14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$.

▷ Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, таким образом, чтобы можно было использовать пример 9.11, и сделаем замену переменной $y = x - 1$. Получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} = e \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e. \quad \triangleleft$$

9.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите предел функции при $x \rightarrow w$ и определите, стремится ли функция к своему пределу слева или справа:

9.1. $f(x) = 2^x$ при $x \rightarrow 0$; 9.2. $f(x) = \cos x$ при $x \rightarrow \pi$;

9.3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$ при $x \rightarrow -1$;

9.4. $f(x) = 3^{-x^2}$ при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы сложных функций:

$$9.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2^x - 1};$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 100x}{x};$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2};$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3}.$$

Докажите следствия из 1-го замечательного предела:

$$9.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \quad 9.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2.$$

Докажите следствия из 2-го замечательного предела:

$$9.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad 9.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p \quad (p \in \mathbb{R});$$

$$9.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$9.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$$

$$9.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x - 1} = p \quad (p \in \mathbb{R}); \quad 9.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Найдите пределы:

$$9.17. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x; \quad 9.18. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$9.19. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1); \quad 9.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2};$$

$$9.21. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0); \quad 9.22. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+a) - \ln x).$$

10. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые

10.1. Основные понятия и теоремы. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a + 0, a - 0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$). Говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая

(1) более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

(обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$);

(2) одного порядка с $\beta(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L \neq 0;$$

(3) эквивалентна $\beta(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

(обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$).

Говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая n -го порядка при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{a, a+0, a-0\}$ ($a \in \mathbb{R}$), если $\lim_{x \rightarrow w} (\alpha(x)/(x-a)^n) = L \neq 0$.

Теорема 10.1 (принцип замены эквивалентных бесконечно малых).

1) Если $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow w$ и $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, то $\lim_{x \rightarrow w} (\alpha(x)/\beta(x)) = \lim_{x \rightarrow w} (\alpha_1(x)/\beta_1(x))$ либо оба предела не существуют.

2) Если $\alpha(x), \alpha_1(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow w$ и $\alpha \sim \alpha_1$, то $\lim_{x \rightarrow w} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow w} (\alpha_1(x) \cdot f(x))$ либо оба предела не существуют.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow w$

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$

2. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$

3. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2};$

4. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$

5. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$

6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$

7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ ($a > 0$),

7a. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$

8. $(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x),$

8a. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}.$

Пусть $f(x), g(x)$ — бесконечно большие при $x \rightarrow w$. Говорят, что $f(x)$ — бесконечно большая

(1) более высокого порядка, чем $g(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} (f(x)/g(x)) = \infty;$$

(2) одного порядка с $g(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} (f(x)/g(x)) = L \neq 0;$$

(3) эквивалентна $g(x)$ при $x \rightarrow w$, если

$$\lim_{x \rightarrow w} (f(x)/g(x)) = 1,$$

(обозначение: $f(x) \sim g(x)$).

Говорят, что $f(x)$ — бесконечно большая n -го порядка при $x \rightarrow w$, где w — один из символов $\{\infty, +\infty, -\infty\}$, если $\lim_{x \rightarrow w} (f(x)/x^n) = L \neq 0$.

10.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow w$. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow w$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \alpha(x) - \beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow w$.

2). Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow w$, а $\lim_{x \rightarrow w} f(x) = k \neq 0$, то $f(x)\alpha(x) \sim k\alpha(x)$.

3). Если $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ — бесконечно большие при $x \rightarrow w$ и $\alpha \sim \alpha_1$ при $x \rightarrow w$, $\beta \sim \beta_1$, то $\lim_{x \rightarrow w} (\alpha(x)/\beta(x)) = \lim_{x \rightarrow w} (\alpha_1(x)/\beta_1(x))$ либо оба предела не существуют.

4). Если $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$ — бесконечно большие при $x \rightarrow w$ и $\alpha \sim \alpha_1$ при $x \rightarrow w$, то $\lim_{x \rightarrow w} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow w} (\alpha_1(x) \cdot f(x))$ либо оба предела не существуют.

10.3. Примеры решения задач.

Пример 10.1. Доказать, что функции $\alpha = \frac{2x^2}{1+x}$ и $\beta = x^2$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка при $x \rightarrow 0$.

▷ Данные функции являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1+x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Найдем предел отношения данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2(1+x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 2 \neq 0$$

Поскольку предел существует и не равен 0, то функции есть бесконечно малые одного порядка. $\triangleleft$

Пример 10.2. Доказать, что порядок функции $\alpha = \frac{x^2 \sin x}{3-x}$ выше, чем порядок функции $\beta = x^2$ при $x \rightarrow 0$.

$\triangleright$ Обе данные функции являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Найдем предел их отношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 \sin x}{3-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{x^2(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3-x} = 0.$$

Поскольку предел существует и равен 0, то функция $\alpha = \frac{x^2 \sin x}{3-x}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta = x^2$. $\triangleleft$

Пример 10.3. Определить порядок функции $\alpha = \operatorname{tg} x - \sin x$ относительно $\beta = x$ при $x \rightarrow 0$.

$\triangleright$ Для определения порядка функции $\alpha = \operatorname{tg} x - \sin x$ нужно найти такое число $n \in \mathbb{N}$, что $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha(x)/x^n) = c \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^n} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot x^n} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-3}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-3}}. \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-3}} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 3; \\ 1 & \text{при } n = 3; \\ +\infty & \text{при } n > 3. \end{cases}$$

Следовательно, бесконечно малая функция $\alpha = \operatorname{tg} x - \sin x$ имеет порядок $n = 3$ относительно x при $x \rightarrow 0$. $\triangleleft$

Пример 10.4. Доказать эквивалентность бесконечно малых функций $\alpha = 1 - \frac{1}{1+x}$ и $\beta = x$ при $x \rightarrow 0$.

▷ Вычислим предел отношения данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{(1+x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Поскольку предел существует и равен 1, то $1 - \frac{1}{1+x} \sim x$ при $x \rightarrow 0$. $\triangleleft$

Пример 10.5. Доказать эквивалентность бесконечно больших функций $y = \sqrt[3]{x^3+9}$ и $g = x$ при $x \rightarrow \infty$.

▷ Вычислим предел отношения данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+9}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[3]{1+9/x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1+9/x^3} = 1.$$

Поскольку предел существует и равен 1, то данные бесконечно большие функции эквивалентны. $\triangleleft$

Найти предел, пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными.

Пример 10.6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

▷ Функция $\alpha = x-3$ при $x \rightarrow 3$ является бесконечно малой, поэтому $\sin(x-3) \sim x-3$ и по принципу замены эквивалентных получаем

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}. \quad \triangleleft$$

Пример 10.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$.

▷ Преобразуем функцию $f(x)$, стоящую под знаком предела. В числителе вынесем за скобки $e^{\beta x}$, а в знаменателе преобразуем сумму тригонометрических функций в произведение. Имеем

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} = \frac{e^{bx}(e^{(a-b)x} - 1)}{2 \cos \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(a-b)x}{2}}.$$

Заметим, что функции $\alpha(x) = (a - b)x$, $\beta(x) = (a - b)x/2$, $\gamma(x) = (a + b)x/2$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$, поэтому, используя формулы 7а и 1 таблицы эквивалентных, имеем

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x); \quad \sin \beta(x) \sim \beta(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos \gamma(x) = 1.$$

Применяя принцип замены эквивалентных, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx}(a - b)x}{2 \cos \frac{(a + b)x}{2} \frac{(a - b)x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx}}{\cos \frac{(a + b)x}{2}} = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 10.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.

▷ Заметим, что $\cos x = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = \cos x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, и воспользуемся формулами 6 и 3 таблицы эквивалентных. Имеем $\ln \cos x \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. Заменяя числитель дроби эквивалентной бесконечно малой, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}. \quad \triangleleft$$

Пример 10.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{1/x} - 1)$.

▷ При $x \rightarrow \infty$ функция $1/x$ является бесконечно малой. По формуле 7 таблицы эквивалентных получаем $a^{1/x} - 1 \sim \frac{\ln a}{x}$ и вычисляем предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{x} \cdot x = \ln a. \quad \triangleleft$$

Пример 10.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x}\right)^x$.

▷ Преобразуем показательно-степенную функцию в показательную

$$\left(\cos \frac{m}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln(\cos(m/x))}.$$

Найдем предел показателя степени:

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{m}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{m}{x} - 1\right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{m^2}{2x^2} = -\frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

При вычислении этого предела мы дважды воспользовались эквивалентностью бесконечно малых функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\ln\left(\cos \frac{m}{x}\right) \sim \cos \frac{m}{x} - 1; \quad 1 - \cos \frac{m}{x} \sim \frac{m^2}{2x^2}.$$

По теореме о пределе непрерывной функции получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x}\right)^{x^2} = e^L = e^{-m^2/2}. \quad \triangleleft$$

Пример 10.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 - x^5}{3x - x^4}.$

$\triangleright$ Заметим, что $\sin x + x^2 - x^5 \sim \sin x$ при $x \rightarrow 0$, так как разность $(\sin x + x^2 - x^5) - \sin x = x^2 - x^5$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\sin x$ (см. теор. упр. 1, п. 10.2). Аналогично, $3x^2 - x^4 \sim 3x$. Заменяя бесконечно малые функции эквивалентными, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 - x^5}{3x - x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

10.4. Задачи для самостоятельной работы.

10.1. Докажите, что функции $\alpha = \frac{1-x}{1+x}$ и $\beta = 1 - \sqrt{x}$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка при $x \rightarrow 1$.

10.2. Докажите, что порядок функции $\alpha = \operatorname{tg} x$ выше, чем порядок функции $\beta = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

10.3. Определите порядок функции $\alpha = \cos x - \cos 2x$ относительно $\beta = x$ при $x \rightarrow 0$.

10.4. Докажите эквивалентность бесконечно малых функций $\alpha = e^{2x} - e^x$ и $\beta = \sin 2x - \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

10.5. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ и $g(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы, пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными:

$$10.6. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{4x+8};$$

$$10.7. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x};$$

$$10.8. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x};$$

$$10.9. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$$

$$10.10. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$$

$$10.11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{-x}}{\sin bx};$$

$$10.12. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$10.13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - x^8}}{e^{5x} - 1};$$

$$10.14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{3x^2 + 5x^4}.$$

11. Точки разрыва. Асимптоты

11.1. Основные понятия и теоремы. Точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если

- (1) f определена в некоторой проколотой окрестности точки a ,
- (2) не является непрерывной в точке a .

Точки разрыва классифицируются следующим образом. Пусть точка $x = a$ есть точка разрыва функции $f(x)$. Она называется

- (1) *точкой устранимого разрыва*, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$;
- (2) *точкой разрыва 1-го рода*, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1, \quad \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2, \quad b_2 \neq b_1$$

(разность $b_2 - b_1$ называется *скачком* функции в точке a);

- (3) *точкой разрыва 2-го рода*, если не существует, по крайней мере, один из двух пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

Теорема 11.1 (точка разрыва монотонной функции). Пусть функция $f(x)$, монотонная на промежутке (a, b) , где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$, терпит разрыв в точке $c \in (a, b)$. Тогда c — точка разрыва 1-го рода.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из двух пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (правой наклонной асимптотой), если эта функция представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Аналогично вводится понятие *наклонной асимптоты* при $x \rightarrow -\infty$ (левой наклонной асимптоты).

Теорема 11.2 (условие существования наклонной асимптоты). Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) в том и только том случае, если существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b \quad (11.1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b \right). \quad (11.2)$$

Если у правой (левой) наклонной асимптоты угловой коэффициент $k = 0$, то ее называют *правой (левой) горизонтальной асимптотой*.

11.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Если функция $f(x)$ монотонна на интервале (a, b) и терпит разрыв в точке $c \in (a, b)$, то c — точка разрыва 1-го рода.

2). Если график четной функции имеет правую наклонную асимптоту, то он имеет и левую, причем левой наклонной асимптотой является прямая, симметричная правой асимптоте относительно оси OY .

3). Если график четной функции имеет правую горизонтальную асимптоту, то эта прямая является и левой горизонтальной асимптотой данного графика.

4). Если график нечетной функции имеет правую наклонную асимптоту, то он имеет и левую, причем левой наклонной асимптотой является прямая, симметричная правой асимптоте относительно начала координат.

тотой является прямая, симметричная правой асимптоте относительно начала координат.

5). Если график нечетной функции имеет правую наклонную асимптоту, проходящую через начало координат, то эта прямая является и левой наклонной асимптотой данного графика.

6). Если график периодической функции имеет асимптоту, то функция является постоянной.

11.3. Примеры решения задач.

Найти точки разрыва функции, если они существуют. Установить, к какому классу относится каждая точка разрыва. В точках разрыва 1-го рода определить скачок.

Пример 11.1. $f = \frac{\sin x}{x}$.

▷ Область определения функции — $\mathbb{R} \setminus 0$. Функция $y = \sin x/x$ является элементарной как частное двух основных элементарных функций $\sin x$ и x и, следовательно, по теореме 5.2 непрерывна на всей области определения, т. е. при $x \neq 0$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв, так как она в этой точке не определена. Поскольку существует $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то имеет место устранимый разрыв. ◁

Пример 11.2. $f = \frac{1}{\cos^2 x}$.

▷ Функция определена и по теореме 5.2 непрерывна при всех x таких, что $\cos^2 x \neq 0$, т. е. при $x \neq \pi/2 + \pi n$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \pi/2 + \pi n} \frac{1}{\cos^2 x} = +\infty$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то точки $x = \pi/2 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) являются точками разрыва 2-го рода данной функции ◁

Пример 11.3. $f = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-5}$.

▷ Функция является сложной, составленной из двух основных элементарных функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $g = \frac{1}{x-5}$, первая из которых определена на всей числовой оси, а вторая не определена при $x = 5$. По теореме 9.4 заключаем, что данная

функция имеет одну точку разрыва $x = 5$. Для выяснения характера разрыва найдем односторонние пределы функции в данной точке. При вычислении пределов используем замену переменной $t = \frac{1}{x-5}$:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 5+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}; \quad (11.3)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 5-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-5} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}. \quad (11.4)$$

Таким образом, данная функция в точке $x = 5$ имеет конечные односторонние пределы, не равные между собой. Следовательно, в точке $x = 5$ имеется разрыв 1-го рода. Скачок равен $L_1 - L_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. $\triangleleft$

Пример 11.4. $f = \frac{1}{2 - 2^{1/x}}$.

$\triangleright$ Функция терпит разрыв в точке, где знаменатель дроби равен нулю. Решая уравнение $2 - 2^{1/x} = 0$, получаем точку разрыва $x = 1$. Кроме того, функция разрывна в точке $x = 0$, так как в этой точке не существует $\frac{1}{x}$. В остальных точках числовой оси функция непрерывна. Определим характер разрывов. Рассмотрим точку $x = 0$. Найдем односторонние пределы функции в данной точке. При вычислении пределов используем замену переменной $t = \frac{1}{x}$ и свойства показательной функции: $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0$. Имеем

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 2^t} = 0; \quad (11.5)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - 2^t} = \frac{1}{2}. \quad (11.6)$$

Итак, пределы функции при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow -0$ существуют и не равны. Следовательно, в точке $x = 0$ имеется разрыв 1-го рода. Скачок равен $L_1 - L_2 = -1/2$. Исследуем теперь точку разрыва $x = 1$. При $x \rightarrow 1$ знаменатель $2 - 2^{1/x} \rightarrow 0$ и, следовательно, $f(x) \rightarrow \infty$. Таким образом, в точке $x = 1$ функция имеет разрыв 2-го рода. $\triangleleft$

Пример 11.5. $f = \sin \frac{1}{x}$.

▷ Функция разрывна в точке $x = 0$, так как в этой точке не определено значение дроби $1/x$. Докажем, что не существует $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Рассмотрим две стремящиеся к нулю последовательности $x_n = \frac{1}{\pi n}$ и $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$. Поскольку $f(x_n) = \sin \pi n = 0$, а $f(y_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует и, следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет разрыв 2-го рода. ◁

Пример 11.6. $f = x + \frac{x+2}{|x+2|}$.

▷ Функция имеет разрыв в точке $x = -2$, где знаменатель дроби обращается в нуль. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки. По определению модуля

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{x+2}{x+2} = x+1 & \text{при } x > -2; \\ x - \frac{x+2}{x+2} = x-1 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x+1) = -1; \\ L_2 &= \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x-1) = -3. \end{aligned}$$

Получается, что односторонние пределы функции в точке $x = -2$ существуют и не равны между собой. Следовательно, в этой точке функция имеет разрыв 1-го рода. Скачок равен $L_1 - L_2 = -1 - (-3) = 2$. ◁

Найти асимптоты графика функции.

Пример 11.7. $f = \frac{3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

▷ Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, причем

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Ищем наклонные асимптоты. По формулам (11.1) устанавливаем существование правой асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 + 3x - 1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 3x - 1}{x(x-1)} = 3;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 3x - 1}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{x-1} = 6.$$

Таким образом, прямая $y = 3x + 6$ является правой наклонной асимптотой графика. Аналогичным образом выясняем наличие левой наклонной асимптоты:

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^2 + 3x - 1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 3x - 1}{x(x-1)} = 3;$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + 3x - 1}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 1}{x-1} = 6.$$

Получилось, что прямая $y = 3x + 6$ является как правой, так и левой наклонной асимптотой графика. $\triangleleft$

Пример 11.8. $f = x \operatorname{arctg} x$.

$\triangleright$ Функция определена на всей оси и поэтому вертикальных асимптот не имеет. Найдём наклонные асимптоты. Для правой наклонной асимптоты имеем:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x - \pi/2; \quad x = -\operatorname{ctg} t \\ x \rightarrow +\infty \implies t \rightarrow 0- \end{array} \right| = - \lim_{t \rightarrow 0-} t \operatorname{ctg} t =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{t \cos t}{\sin t} = -1.$$

Итак, прямая $y = \pi x/2 - 1$ является правой наклонной асимптотой графика. Функция $f = x \operatorname{arctg} x$ является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси OY . Отсюда следует, что ее левой наклонной асимптотой является прямая, симметричная правой асимптоте относительно оси OY , т.е. прямая $y = -\pi x/2 - 1$.

Пример 11.9. $f = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

▷ Функция определена на всей оси и поэтому вертикальных асимптот не имеет. Найдем наклонные асимптоты. Для правой наклонной асимптоты имеем:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} = 0; \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x^2}}{x} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Таким образом, график функции имеет правую горизонтальную асимптоту $y = 0$. Функция $f = e^{-x^2}/x$ является нечетной, поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Отсюда следует, что ее левой наклонной асимптотой является прямая, симметричная правой асимптоте относительно начала координат. Таким образом, прямая $y = 0$ является как правой, так и левой горизонтальной асимптотой.

11.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите точки разрыва функций, если они существуют. Установите, к какому классу относится каждая точка разрыва. В точках разрыва 1-го рода определите скачок.

$$\begin{aligned} 11.1. \quad f &= \frac{\sin^2 x}{x}; & 11.2. \quad f &= \frac{4}{x^2 - 2x + 1}; & 11.3. \quad f &= \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}; \\ 11.4. \quad f &= \frac{|2x - 3|}{2x - 3}; & 11.5. \quad f &= \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; & 11.6. \quad f &= \frac{|\sin x|}{\sin x}; \\ 11.7. \quad f &= \frac{1}{1 + 2^{1/x}}; & 11.8. \quad f &= \frac{\sqrt{1+x} - x}{x^2}; & 11.9. \quad f &= \frac{2|x-1|}{x^2 - x^3}. \end{aligned}$$

Найдите асимптоты графиков функций:

$$\begin{aligned} 11.10. \quad f &= \frac{x}{x^2 + 1}; & 11.11. \quad f &= \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}; \\ 11.12. \quad f &= e^{1/(x-1)(3-x)}; & 11.13. \quad f &= \ln(4 - x^2); \\ 11.14. \quad f &= 2\sqrt{4 + x^2}; & 11.15. \quad f &= \sqrt{1 + x^2} \sin \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

12. Свойства функций, непрерывных на промежутках

12.1. Основные понятия и теоремы. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b) , где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$), если она непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна в точке a справа, непрерывна в точке b слева.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* $[a, b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна в точке a справа. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* $(a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна в точке b слева.

Введем обозначение:

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in X \subset D(f)\}.$$

Теорема 12.1 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке и принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.

Теорема 12.2 (Больцано–Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого числа C , заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Теорема 12.3 (достаточное условие непрерывности монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X и $f(X)$ есть промежуток, то $f(x)$ непрерывна на X .

Теорема 12.4 (непрерывность обратной функции). Пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на промежутке X и $Y = f(X)$. Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$; она строго монотонна и непрерывна на промежутке Y .

Теорема 12.5. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке X , то $f(X)$ есть промежуток.

12.2. Теоретические упражнения.

Докажите следующие утверждения.

1). Пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует единственная точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$.

2). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Тогда $f([a, b]) = [m, M]$.

3). Пусть функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на промежутке $X = [a, b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$, и не является постоянной. Тогда $f(X) = [A, B)$, где $A = f(a)$, $B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

4). Пусть функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на промежутке $X = (a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, и не является постоянной. Тогда $f(X) = (A, B]$, где $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $B = f(b)$.

5). Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

6). Если многочлен четной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку старшему коэффициенту, то он имеет не менее двух действительных корней.

7). Приведите пример, показывающий, что теорема, обратная к теореме 12.4, не верна, т.е. функция, имеющая обратную, может быть немонотонной.

12.3. Примеры решения задач.

Пример 12.1. Определить, имеет ли корни уравнение

$$\sin x = x - 1.$$

▷ Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + 1$. Эта функция непрерывна на всей числовой оси и принимает значения разных знаков. Например, $f(0) = 1 > 0$, а $f(\pi) = 1 - \pi < 0$. Следова-

тельно, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, на отрезке $[0, \pi]$ существует корень данного уравнения. $\triangleleft$

Пример 12.2. *Определить, имеет ли уравнение $f(x) = 0$ корень на отрезке $[-1, 1]$, если*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0); \\ -(x^2 + 2), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$\triangleright$ На концах данного отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков: $f(-1) = 1$; $f(1) = -2$. Но ни в одной точке данного отрезка функция не обращается в нуль, так как $f(x) = -(x^2 + 2) < 0$ при любом $x \geq 0$ и $f(x) = x^2 + 2 > 0$ при $x < 0$. Однако это не противоречит теореме Больцано–Коши, так как функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x = 0$. $\triangleleft$

Пример 12.3. *Определить, достигает ли функция $f(x) = \{x\}$ своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке: а) $[n, n + 1/2]$; б) $[n, n + 3/2]$.*

$\triangleright$ а). На отрезке $[n, n + 1/2]$ функция $f(x) = \{x\}$ непрерывна, возрастает и достигает на нем наименьшее значение в левом, а наибольшее — в правом конце отрезка:

$$\min_{x \in [n, n+1/2]} f(x) = f(n) = 0; \quad \min_{x \in [n, n+1/2]} f(x) = f(n + 1/2) = 1/2.$$

б). Множество значений функции $f(x) = \{x\}$ есть промежуток $[0, 1)$. На промежутке $[n, n + 3/2]$ эта функция принимает наименьшее значение $f(n) = 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow (n+1)-} f(x) = 1$ и $f(x) < 1$, то $\sup_{x \in [n, n+3/2]} f(x) = 1$. Однако, $f(x) \neq 1$ для лю-

бого x . Следовательно, функция $f(x)$ не достигает на отрезке $[n, n + 3/2]$ своего наибольшего значения. Это не противоречит теореме Вейерштрасса, потому что функция $f(x) = \{x\}$ в точке $x = n + 1$ терпит разрыв. $\triangleleft$

Пример 12.4. *Доказать, что функция $f(x) = (3x + 1)/x$ имеет обратную в промежутке $(0, +\infty)$. Найти обратную функцию.*

$\triangleright$ Преобразуем данную функцию, выделив целую часть дроби. Получим

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x} = 3 + \frac{1}{x}.$$

Поскольку функция $h = 1/x$ строго убывает и непрерывна в промежутке $(0, +\infty)$, то и функция $f(x)$ строго убывает и непре-

рывна в этом промежутке. На основании теоремы 12.4 заключаем, что $f(x)$ в промежутке $(0, +\infty)$ имеет обратную. Найдем обратную функцию. Пусть $y = 3 + 1/x$. Тогда $y - 3 = 1/x$ и $x = 1/(y - 3)$ есть искомая функция независимой переменной y . Обозначая аргумент обратной функции через x , окончательно получаем, что обратная функция имеет вид $g(x) = 1/(x - 3)$. $\triangleleft$

12.4. Задачи для самостоятельной работы.

12.1. Определите, имеет ли корни уравнение

$$x^5 - 18x^3 + 333 = 0?$$

12.2. Докажите, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[1, 2]$ и вычислите его с точностью до 0,01.

12.3. Определите, достигает ли функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \leq 0; \\ -x & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке $[-1, 1]$.

12.4. Докажите, что функция

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 1; \\ x^2 & \text{при } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

имеет непрерывную обратную в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Найдите обратную функцию.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Числовые множества и функции на них

1.1. $x = -1$, $x = 3$. **1.2.** $x = -3$, $x = 3$. **1.3.** $x \in (2, 3)$. **1.4.** $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. **1.5.** $x \in (-1, 0)$. **1.6.** $x \in (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$. **1.7.** $|x| > 3$.

3.1. Ограничено снизу. **3.2.** Ограничено. **3.3.** Не ограничено ни снизу, ни сверху. **3.4.** Ограничено. **3.5.** $\sup X = +\infty$, $\max X \nexists$, $\inf X = \min X = 0$. **3.6.** $\sup X = \max X = 1/2$, $\inf X = 0$, $\min X \nexists$.

4.1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. **4.2.** $D(f) = \{-\pi/6 + 2\pi k < x < 7\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. **4.3.** $D(f) = \{1\}$. **4.4.** $E(f) = [0, 1]$. **4.5.** $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **4.6.** $E(f) = (0, 1/3]$. **4.7.** $E(f) = (0, +\infty)$.

5.1. Не является ни четной, ни нечетной. **5.2.** Четная. **5.3.** Не является ни четной, ни нечетной. **5.4.** Четная. **5.5.** Не является ни четной, ни нечетной. **5.6.** Нечетная. **5.7.** Убывает при $x \leq 0$, возрастает при $x \geq 0$. **5.8.** Убывает на R . **5.9.** Возрастает при $x \leq -1/2$, убывает при $x \geq -1/2$. **5.10.** Возрастает при $x < 2$ и при $x > 2$.

6.5. Ограничена снизу. **6.6.** Ограничена снизу. **6.7.** Ограничена снизу и сверху. **6.8.** Ограничена сверху. **6.9.** $\sup f = \max f = 3$, $\inf f = \min f = -1$. **6.10.** $\sup f = 1$, $\max f \nexists$, $\inf f = \min f = 0$. **6.11.** $\sup f = \max f = 1/6$, $\inf f = \min f = 0$. **6.12.** $\sup f = 0$, $\inf f = -\infty$, $\max f \nexists$, $\min f \nexists$.

7.1. $T = 2\pi/5$. **7.2.** $T = \pi$. **7.3.** $T \nexists$. **7.4.** $T = 6\pi$. **7.5.** $T \nexists$. **7.6.** $T \nexists$. **7.7.** $T = \pi/2$. **7.8.** $T \nexists$. **7.9.** $T = \pi$.

8.1. $f \circ g(x) = |1 - x|$, $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = 1 - |x|$, $x \in \mathbb{R}$. **8.2.** $f \circ g(x) = (3 + x)^5$, $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = 3 + x^5$, $x \in \mathbb{R}$. **8.3.** $f \circ g(x) = \log_2 \sqrt{x}$, $x > 0$; $g \circ f(x) = \sqrt{\log_2 x}$, $x \geq 1$. **8.4.** $f \circ g(x) = \ln \sin^2 x$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $g \circ f(x) = \sin \ln x^2$, $x \neq 0$. **8.5.** $f = g \circ h$, $g = x^{10}$, $h = 1 - 4x$. **8.6.** $f = g \circ h \circ q$, $g = \sqrt[5]{x}$, $h = \cos x$, $q = 2x$. **8.7.** $f = g \circ h \circ q$, $g = \ln x$, $h = \sin x$, $q = \log_3 x$. **8.8.** $f = g \circ h \circ q$, $g = \operatorname{tg} x$, $h = 5^x$, $q = \sin x$. **8.9.** $f^{-1} = 1/x - 1$, $x \neq 0$. **8.10.** $f^{-1} \nexists$. **8.11.** $f^{-1} = x - 2\sqrt{1+x} + 2$, $x \geq 0$. **8.12.** $f^{-1} = \sqrt[3]{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. **8.13.** $f^{-1} \nexists$. **8.14.** $f^{-1} \nexists$. **8.15.** $f^{-1} = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. **8.16.** $f^{-1} = x/(1-x)$, $x \neq 1$.

2. Предел последовательности

1.1. Ограничена. **1.2.** Ограничена сверху. **1.3.** Ограничена снизу. **1.4.** Ограничена. **1.5.** Возрастает. **1.6.** Убывает. **1.7.** Немонотонна. **1.8.** Немонотонна.

3.1. Воспользуйтесь неравенством $2000/n \leq 1/2$, $n \geq 4000$ и теоремой 3.1. **3.2.** Воспользуйтесь неравенством $(3n+4)/n^2 \leq 7/n \leq 1/2$, $n \geq 1$ и теоре-

мой 3.1. **3.3.** Воспользуйтесь неравенством $(n+2)/(4n-1) \leq 1/2$, $n \geq 3$ и теоремой 3.1.

4.1. Нет. **4.2.** Да. **4.3.** Да. **4.4.** Да. **4.5.** Да. **4.6.** Да.

6.1. $3/2$. **6.2.** 0. **6.3.** $1/2$. **6.4.** 0. **6.5.** 3. **6.6.** 1. **6.7.** -1 . **6.8.** 0. **6.9.** 2. **6.10.** $1/2$. **6.11.** $+\infty$. **6.12.** 1. **6.13.** 0. $\circ$ Умножьте и разделите на неполный квадрат суммы.

7.4. 0. **7.5.** ± 1 . **7.6.** $\nexists$. **7.7.** ± 1 , $\pm 1/2$. **7.8.** $\pm 3/2$. **7.9.** 3, 5.

8.3. e^3 . **8.4.** e . **8.5.** $\sqrt{e}$. **8.6.** e^{-1} . **8.7.** 0. **8.8.** 0. **8.9.** 3.

3. Предел и непрерывность функции

1.1. c . **1.2.** 4. **1.3.** 0. **1.4.** 0. **1.5.** $\nexists$. **1.6.** $\nexists$.

4.1. а) -11 ; б) -9 . **4.2.** а) $1/2$; б) 2. **4.4.** 1; **4.5.** 4; **4.6.** $-1/3$; **4.7.** -6 .

5.1. Нет непрерывности. **5.2.** Нет непрерывности. **5.3.** Непрерывна.

5.4. Непрерывна при $x \notin \mathbb{Z}$. **5.5.** Непрерывна при $x \neq 1$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

5.6. Непрерывна при $x \neq \pi(2n-1)/2, n \in \mathbb{Z}$.

6.1. 2, -2 , $\nexists$. **6.2.** 3, 4, $\nexists$. **6.3.** $\nexists$, $\nexists$, $\nexists$. **6.4.** $\nexists$, $\nexists$, $\nexists$. **6.5.** Непрерывна. **6.6.** Не является непрерывной ни справа, ни слева. **6.7.** Не является непрерывной ни справа, ни слева. **6.8.** Непрерывна справа; не непрерывна слева. **6.9.** 2.

8.1. $3+$. **8.2.** $1-$. **8.3.** $e-$. $\circ$ См. пример 1.5 из 2.1. **8.4.** 0; не стремится к пределу ни слева, ни справа. **8.5.** $+\infty$. $\circ$ Вынесите в числителе и знаменателе старшие степени x из-под корня. **8.6.** 0. $\circ$ Умножьте и разделите на неполный квадрат суммы. **8.7.** 3. **8.8.** e^6 . **8.9.** $1/e^5$. **8.10.** -2 . **8.11.** e^4 . **8.12.** $1/(e\sqrt{e})$.

9.1. 1; не стремится к пределу ни слева, ни справа. **9.2.** $-1+$. **9.3.** $2+$.

9.4. $0+$. **9.5.** -1 . **9.6.** 100. **9.7.** 0. $\circ$ Замена переменной $y = \sqrt[3]{x}$. **9.8.** e^{-8} .

$\circ$ Выделите целую часть дроби. **9.17.** 1. **9.18.** $2/\pi$. **9.19.** 1. **9.20.** $4\ln 2$.

$\circ$ Сделайте замену $t = x - 2$ и используйте задачу 9.11. **9.21.** $\sqrt{4} \ln 2$. $\circ$ Сделайте замену $t = x/a - 1$ и используйте пример 9.10. **9.22.** a .

10.4. 2. **10.4.** $f(x)$ имеет более высокий порядок, чем $g(x)$. **10.6.** $1/4$.

10.7. 0. **10.8.** $1/\sqrt{3}$. **10.9.** 0. $\circ$ Воспользуйтесь эквивалентностью $\ln(1 + a^x) \sim a^x$ ($a > 1$) при $x \rightarrow -\infty$. **10.10.** $\ln 3 / \ln 2$. $\circ$ Воспользуйтесь равенством

$\ln(1 + a^x) = \ln(a^x(1 + a^{-x}))$. **10.11.** $2a/b$. **10.12.** 1. **10.13.** $2/5$. **10.14.** $1/3$.

11.1. Устранимый разрыв в точке $x = 0$. **11.2.** Разрыв 2-го рода в точке $x = 1$.

11.3. Разрыв 2-го рода в точке $x = 0$. **11.4.** Разрыв 1-го рода в точке $x = 3/2$.

Скачок равен 2. **11.5.** Устранимый разрыв в точках $x = 2\pi k$. **11.6.** Разрыв

1-го рода в точках $x = \pi k$. Скачок равен 2. **11.7.** Разрыв 1-го рода в точке

$x = 0$. Скачок равен -1 . **11.8.** Разрыв 2-го рода в точке $x = 0$. **11.9.** Разрыв

2-го рода в точке $x = 0$, разрыв 1-го рода в точке $x = 1$. Скачок равен -4 .

11.10. $y = 0$. **11.11.** $x = 0$; $y = x - 2$. **11.12.** $x = 1$, $x = 3$. **11.13.** $x = 2$;

$x = -2$. **11.14.** $y = 2x$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = -2x$ при $x \rightarrow -\infty$. **11.15.** $y = 1$;

$y = -1$.

12.1. Да. **12.2.** 1,53. **12.3.** Да.

12.4. $x = \begin{cases} y & \text{при } -\infty < y \leq 1; \\ \sqrt{y} & \text{при } 1 < y \leq 16; \\ \log_2 y & \text{при } 16 < y < +\infty. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольная работа по теме «Предел последовательности»

Найдите пределы последовательностей:

Вариант I.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{n^3 - 2} + \frac{\sin n}{n^2 + 1} \right);$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} \right) n.$

Вариант II.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n \cos n}{4n^2 - 1};$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2 - 3} \right) n.$

Вариант III.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2} + n \sin \frac{\pi n}{2} \right);$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!};$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n \right).$

Вариант IV.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n \cos n}{2n + 1};$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!};$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{7^{n-1} - 2^n};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n(n-1)} \right).$

Вариант V.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n + 1}{100n^3 + 15n}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + (-2)^n}{7^{n-1} - 2^n}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right)$.

Вариант VI.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + (-2)^n}{5^{n+1} + 2^{n+1}}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+5)} - n \right)$.

Вариант VII.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n-1)! + (2n+2)!}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + 2^n}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \right)$.

Вариант VIII.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! - (3n-1)!}{(3n+1)!}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-2)^n}{5^{n+1} - 2^{n+1}}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1} \right)$.

Вариант IX.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n)!}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n + 10^n}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right)$.

Вариант X.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n)!}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n - n^2 + 3}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right)$.

2. Контрольная работа по теме «Предел и непрерывность функции»

Вариант I.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

а) при $x \rightarrow 2$; б) при $x \rightarrow 3$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \operatorname{tg} x;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+3x^2} - 1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{2x^2}.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Вариант II.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^{100} + x^{99}}{x^{101} - x^{100}}$$

а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow -\infty$; в) при $x \rightarrow 0$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1});$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2} - 1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} 1/x.$$

Вариант III.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{y^4 - y^2 + y - 1}{y - 1}$$

а) при $y \rightarrow +\infty$; б) при $y \rightarrow -\infty$; в) при $y \rightarrow 1$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[5]{1+2x} - 1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+x}{3+x} \right)^x.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Вариант IV.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4}$$

а) при $x \rightarrow 2$; б) при $x \rightarrow -2$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4} - x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 7^x}{3^x - 10^x};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^3+8} \right)^{2/(x+1)}.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

Вариант V.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$$

а) при $x \rightarrow 1$; б) при $x \rightarrow -1$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1});$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 3x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+3}.$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f = \begin{cases} x + 2, & x < 2; \\ x^2 - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант VI.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{(1 - x)(x + 2)}$$

а) при $x \rightarrow 1$; б) при $x \rightarrow -2$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3} + 5x);$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5^x - 5^5}{\operatorname{arctg}(x - 5)};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x - 6}\right)^x.$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x}.$$

Вариант VII.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x + 1)^4}$$

а) при $x \rightarrow 1$; б) при $x \rightarrow -1$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x);$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) / \operatorname{tg} \pi x;$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x - 1} \right)^{4x - 3}.$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f = \begin{cases} -x, & x \leq 1; \\ \frac{2}{x - 1}, & x > 1. \end{cases}$$

Вариант VIII.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2}{6 - x + 2x^2 + x^3}$$

а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow -\infty$; в) при $x \rightarrow -3$.

Найдите пределы функций:

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1});$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^{x-2} - 1}{3^{x-2} - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x}{2x - 1} \right)^{x^2}.$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

Вариант IX.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 4} + \frac{x^2}{3x + 2}$$

а) при $x \rightarrow 1$; б) при $x \rightarrow -2/3$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} + 5x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{4/5} - 1}{x^{3/2} - 1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 1} \right)^{x+1}.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{2|x - 1|}{x^2 - x^3}.$$

Вариант X.

1. Найдите пределы дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$$

а) при $x \rightarrow -1$; б) при $x \rightarrow 0$; в) при $x \rightarrow \infty$.

Найдите пределы функций:

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{3x + 5};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 64}{x - 3};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\log_2 x)}{x - 2}.$$

6. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\ln |x|}{x - 1}.$$

Часть II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Понятие производной

1.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале (a, b) , $x_0, x \in (a, b)$, причем $x \neq x_0$. Положим

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Назовем Δx приращением аргумента, а Δf — соответствующим приращением функции в точке x_0 .

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначения производной:

$$f'(x_0), \quad f'(x)|_{x=x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функция, имеющая в некоторой точке производную, называется *дифференцируемой в этой точке*.

Теорема 1.1 (формула бесконечно малых приращений).

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 . Тогда приращение функции $f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0. \quad (1.1)$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b) , то она называется *дифференцируемой в интервале (a, b)* . Обозначения: $f'(x)$, f'_x , f' , $\frac{df}{dx}$.

1.2. Теоретические упражнения.

1). Верно ли утверждение: если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет в этой точке производную?

2). Докажите следующие утверждения:

1) Производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная.

2) Производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

3) Производная дифференцируемой периодической функции есть функция периодическая с тем же периодом.

1.3. Примеры решения задач.

Найти $f'(x_0)$, пользуясь определением производной функции в точке.

Пример 1.1. $f = 5x^2$, $x_0 = 1$.

▷ Найдем приращение функции $f(x) = 5x^2$ в точке $x_0 = 1$, соответствующее приращению аргумента Δx :

$$\Delta f = f(1 + \Delta x) - f(1) = 5(1 + \Delta x)^2 - 5 = 10\Delta x + 5(\Delta x)^2.$$

Вычислим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{10\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (10 + 5\Delta x) = 10.$$

Следовательно, $f'(1) = 10$. ◁

Пример 1.2. $f = \sqrt{x}$, $x_0 = 5$.

▷ Имеем

$$\Delta f = f(5 + \Delta x) - f(5) = \sqrt{5 + \Delta x} - \sqrt{5}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{5 + \Delta x} - \sqrt{5}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{5 + \Delta x})^2 - (\sqrt{5})^2}{\Delta x(\sqrt{5 + \Delta x} + \sqrt{5})} = \\ &= \frac{5 + \Delta x - 5}{\Delta x(\sqrt{5 + \Delta x} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5 + \Delta x} + \sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{5 + \Delta x} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Итак, $f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$

◁

Пример 1.3. $f = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$.

▷ Имеем $\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - 0 = \sqrt[3]{(\Delta x)^2};$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty.$$

Следовательно, функция в точке $x_0 = 0$ не имеет производной.

◁

Найти $f'(x)$, пользуясь определением производной. Указать область существования производной.

Пример 1.4. $f = C$.

▷ Для любых x и Δx имеем

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0; \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $(C)' = 0.$

◁

Пример 1.5. $f = x$.

▷ Имеем $\Delta f = (x + \Delta x) - x = \Delta x;$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

т. е. $(x)' = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}.$

◁

Пример 1.6. $f = \sin x$.

▷ Имеем $\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Преобразовав разность

синусов в произведение, получим $\Delta f = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.
Найдем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малые $\sin \frac{\Delta x}{2}$ и $\frac{\Delta x}{2}$ эквивалентны, т. е. справедливо соотношение $\sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$. Учитывая это, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Таким образом, $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x$. $\triangleleft$

Пример 1.7. $f = e^x$.

$\triangleright$ Имеем $\Delta f = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$;

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x. \end{aligned}$$

Итак, $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$. $\triangleleft$

Пример 1.8. $f = \ln x$.

$\triangleright$ Имеем:

$$\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x} \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Итак, $\forall x > 0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$. $\triangleleft$

Пример 1.9. $f = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

▷ Имеем

$$\begin{aligned}\Delta f &= (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left(\frac{(x + \Delta x)^\alpha}{x^\alpha} - 1 \right) = \\ &= x^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\alpha - 1 \right).\end{aligned}$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\alpha - 1 \sim \alpha \frac{\Delta x}{x} \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Итак, $\forall x > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

◁

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите $f'(x_0)$, пользуясь определением производной функции в точке.

1.1. $f = 3x$, $x_0 = -2$; 1.2. $f = 2|x - 1|$, $x_0 = -1$;

1.3. $f = \frac{1}{x^2 - 3}$, $x_0 = 0$; 1.4. $f = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

1.5. $f = \arcsin x$, $x_0 = 0$; 1.6. $f = x^\alpha$, $\alpha > 0$, $x_0 = 0$.

Найдите $f'(x)$, пользуясь определением производной. Укажите область существования производной.

1.7. $f = x^3 - 2x$; 1.8. $f = \frac{1}{x^2 + 1}$; 1.9. $f = \frac{5}{1 - 3x}$;

1.10. $f = \cos x$; 1.11. $f = a^x$; 1.12. $f = \log_a x$.

2. Правила вычисления производной. Таблица производных

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0 . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\lambda f(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f(x)/g(x)$ (частное при условии $g(x_0) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0 , причем в точке x_0 справедливы равенства:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (2.1)$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad (2.2)$$

Формулы (2.1) выражают свойство линейности операции дифференцирования.

Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ таковы, что область значений $E(f)$ функции f содержится в области определения $D(g)$ функции g , т. е. $E(f) \subset D(g)$.

Сложной функцией $z = g \circ f$ называют функцию, определенную на множестве $D(f)$ формулой $z(x) = g(f(x))$.

Теорема 2.2 (о производной сложной функции). Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0 и

$$z'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, удовлетворяет условию, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае для любого $y \in E(f)$ найдется только один $x \in D(f)$ такой, что $f(x) = y$.

Функция, значения которой определяются по правилу: элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствие элемент $x \in D(f)$ такой, что $f(x) = y$, называют обратной к функции f и обозначают символом f^{-1} . Функция, обратная к f^{-1} , есть f . Поэтому функции f и f^{-1} называются взаимно обратными. Для обозначения пары взаимно обратных функций удобно использовать обозначения: $y = y(x)$, $x = x(y)$.

Теорема 2.3 (об обратной функции). Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) в проме-

жутке X . Тогда в промежутке $y(X)$ существует обратная функция $x = x(y)$, также строго возрастающая (убывающая) и непрерывная в этом промежутке.

Теорема 2.4 (о производной обратной функции). Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет условиям:

1. $y = y(x)$ определена и непрерывна в интервале X ;
2. имеет обратную функцию $x = x(y)$, определенную в интервале $E(y)$;
3. $x_0 \in X$ и существует $y'(x_0)$, причем $y'(x_0) \neq 0$.

Тогда обратная функция $x = x(y)$ в точке $y_0 = y(x_0)$ имеет производную и

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

I.	$C' = 0$
II.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
III.	$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$
IV.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
V.	$(\sin x)' = \cos x$
VI.	$(\cos x)' = -\sin x$
VII.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
VIII.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
IX.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
X.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XI.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
XII.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Каждая из этих формул справедлива при тех значениях переменной x , при которых определены ее левая и правая части.

2.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите формулы:

$$1) (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'; \quad 2) (f(ax + b))' = af'(ax + b).$$

2). Можно ли утверждать, что произведение $h(x) = f(x)g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если:

1) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке.

2) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 .

Рассмотрите примеры:

$$1) f(x) = x; \quad g(x) = |x|; \quad 2) f(x) = |x|; \quad g(x) = |x|.$$

3). Можно ли утверждать, что сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если:

1) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке?

2) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 ?

4). Пусть $f(x)$ — четная всюду дифференцируемая функция. Верно ли какое-либо из следующих утверждений: а) $f'(0) > 0$; б) $f'(0) < 0$; с) $f'(0) = 0$?

5). Верно ли утверждение: если $f(x) < g(x)$, то $f'(x) < g'(x)$?

2.3. Примеры решения задач.

Найти производную функции, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования.

Пример 2.1. $f = \sqrt{7} + 4x^4 - 6x$.

▷ Данная функция — алгебраическая сумма трех дифференцируемых функций. Сначала используем правила дифференцирования суммы, разности и вынесения постоянного множителя за знак производной:

$$f'(x) = (\sqrt{7} + 4x^4 - 6x)' = (\sqrt{7})' + 4(x^4)' - 6(x)'.$$

Теперь к первому слагаемому применим формулу (I) таблицы, а ко второму и третьему — формулу (II) с $\alpha = 4$ и $\alpha = 1$:

$$f'(x) = 0 + 4 \cdot 4x^3 - 6x^0 = 16x^3 - 6. \quad \triangleleft$$

Пример 2.2. $f = 5^x \cos x$.

▷ Данная функция — произведение двух дифференцируемых функций. Применяя формулу для производной произведения и табличные формулы (III) и (IV), получим:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5^x \cos x)' = (5^x)' \cos x + 5^x (\cos x)' = \\ &= 5^x \ln 5 \cos x + 5^x (-\sin x) = 5^x (\ln 5 \cos x - \sin x). \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.3. $f = \frac{\log_3 x}{\sin x}$.

▷ Данная функция — частное двух дифференцируемых функций. Применим формулу для производной частного и табличные формулы (IV) и (V). Получим:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\log_3 x}{\sin x} \right)' = \frac{(\log_3 x)' \sin x - \log_3 x (\sin x)'}{(\sin x)^2} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x \ln 3} - \log_3 x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{\sin x - x \ln 3 \log_3 x \cos x}{x(\sin x)^2 \ln 3}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.4. $f = \frac{1}{2^x} + \frac{x \ln x - 4}{x} - \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^3}$.

▷ Сначала выполним тождественные преобразования. Во втором слагаемом разделим почленно числитель на знаменатель, введем дробные и отрицательные показатели степени:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2^x} + \frac{x \ln x - 4}{x} - \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^3} = \\ &= \frac{1}{2^x} + \ln x - \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^3} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^x + \ln x - 4x^{-1} - x^{2/3} - x^{-1/2} + 5x^{-3}. \end{aligned}$$

Теперь используем линейность операции дифференцирования, а также формулу (III) с $a = 1/2$ для первого слагаемого и фор-

мулу (II) — для остальных слагаемых при $\alpha = 1, -1, 2/3, -1/2, -3$ соответственно:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{x} - 4(-1)x^{-2} - \frac{2}{3}x^{-1/3} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} + \\ &+ 5(-3)x^{-4} = -\frac{\ln 2}{2^x} + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{15}{x^4}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.5. $f = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

▷ Данная функция — произведение трех сомножителей. Применив правило дифференцирования произведения два раза, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9))' = \\ &= ((x^2 - 1)(x^2 - 4))'(x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)' = \\ &= ((x^2 - 1)'(x^2 - 4) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)') \times \\ &\quad \times (x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)2x = \\ &= (2x(x^2 - 4) + (x^2 - 1)2x)(x^2 - 9) + 2x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = \\ &= 2x(3x^4 - 28x^2 + 49). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Найти производную, используя правило дифференцирования сложной функции.

Пример 2.6. $z = \sqrt[3]{4 + 7 \cos x}$.

▷ Представим функцию $z(x)$ в виде сложной функции $z(x) = g(f(x))$, где $f(x) = 4 + 7 \cos x$ и $g(y) = \sqrt[3]{y}$, причем

$$f'(x) = -7 \sin x, \quad g'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции (теорема 2.2) имеем

$$\begin{aligned} z'(x) &= g'(y)f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot (-7 \sin x) \Big|_{y=4+7 \cos x} = \\ &= -\frac{7 \sin x}{3\sqrt[3]{(4 + 7 \cos x)^2}}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.7. $u = \arctg(x^4 + 1)^5$.

▷ В данном случае правило дифференцирования сложной функции нужно применить несколько раз, «по цепочке», по-

следовательно переходя от «внешней» функции к «внутренней». У функции $u = \operatorname{arctg}(x^4 + 1)^5$ «внешней» функцией является $g = \operatorname{arctg} y$. Представим $u(x)$ в виде $u(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \operatorname{arctg} y$ и $f(x) = (x^4 + 1)^5$. Для нахождения ее производной применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (\operatorname{arctg} y)' \cdot f'(x) = \frac{1}{1+y^2} ((x^4 + 1)^5)' \Big|_{y=(x^4+1)^5} = \\ &= \frac{((x^4 + 1)^5)'}{1 + (x^4 + 1)^{10}}. \end{aligned}$$

Найдем теперь производную функции $z(x) = (x^4 + 1)^5$. Представим ее в виде $z(x) = h(p(x))$, где $h(y) = y^5$ и $p(x) = x^4 + 1$. Применив еще раз правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} z'(x) &= h'(y) \cdot p'(x) = (y^5)' \cdot ((x^4 + 1)^5)' = \\ &= 5(x^4 + 1)^4 4x^3 = 20x^3(x^4 + 1)^4. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$u'(x) = \frac{20x^3(x^4 + 1)^4}{1 + (x^4 + 1)^{10}}. \quad \triangleleft$$

Доказать формулу.

Пример 2.8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, есть функция, обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Функция $x = \operatorname{tg} y$ непрерывна и строго возрастает в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. По теореме 2.3 она имеет обратную функцию $y = \operatorname{arctg} x$, определенную в интервале $(-\infty, +\infty)$. Функция $x = \operatorname{tg} y$ имеет производную $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, причем $x'(y) \neq 0$ при $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Применяя к функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ теорему о производной обратной функции, получаем, что $y = \operatorname{arctg} x$ в каждой точке интервала $(-\infty, +\infty)$ имеет производную и $y'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y$. Для получения $y'(x)$ как функции переменной

x выразим $\cos^2 y$ через x , используя тождество $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$.

Имеем $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$. Окончательно получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

Пример 2.9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$.

▷ Функция $y = \arcsin x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ есть функция, обратная к функции $x = \sin y$, $y \in (-1, 1)$. Функция $x = \sin y$ непрерывна и строго возрастает в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. По теореме 2.3 она имеет обратную функцию $y = \arcsin x$, определенную в интервале $(-1, 1)$. Функция $x = \sin y$ имеет производную $x'(y) = \cos y$, причем $x'(y) \neq 0$ при $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. По теореме о производной обратной функции, получаем, что $y = \arcsin x$ в каждой точке интервала $(-1, 1)$ имеет производную и $y'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y}$. Выразим $\cos y$ через переменную x : $\cos y > 0$ при $|y| < \pi/2$, поэтому $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Окончательно получаем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad \triangleleft$$

Пример 2.10. Найти производную функции

$$f = x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x.$$

▷ Пользуясь линейностью операции дифференцирования, имеем

$$f' = (x)' - \left(\ln \sqrt{1 + e^{2x}} \right)' + (e^{-x} \operatorname{arctg} e^x)'.$$

Применив ко второму и третьему слагаемым правила дифференцирования сложной функции и произведения, а также табличные формулы (II), (III), (IV) и (XII), получим

$$\begin{aligned} f' &= 1 - \frac{(\sqrt{1 + e^{2x}})'}{\sqrt{1 + e^{2x}}} + (e^{-x})' \operatorname{arctg} e^x + e^{-x} (\operatorname{arctg} e^x)' = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} + (e^{-x})(-1) \operatorname{arctg} e^x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + e^{-x} \left(-\frac{1}{1 + (e^x)^2} \right) e^x &= 1 - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} - \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} - \\
 - \frac{1}{1 + e^{2x}} &= -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите производные функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования.

$$2.1. \quad f = \frac{\ln 5}{x} - e^3 + \sqrt[5]{x}; \quad 2.2. \quad f = 7x^8 + \frac{3}{x^2} + x^2 \sqrt{x};$$

$$2.3. \quad f = (x^2 - 7x + 8)e^x; \quad 2.4. \quad f = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}.$$

Найдите производные, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$\begin{aligned}
 2.5. \quad f &= \sqrt[3]{2x-1}; & 2.6. \quad f &= \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}); \\
 2.7. \quad f &= 2^{x^3+3x}; & 2.8. \quad f &= e^{\sqrt{1-\cos 2x}}; \\
 2.9. \quad f &= \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right); & 2.10. \quad f &= \log_3 \log_5 \log_7 (x^2 + 4).
 \end{aligned}$$

Докажите формулы, используя теорему о производной обратной функции.

$$\begin{aligned}
 2.11. \quad (\operatorname{arctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 2.12. \quad (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \\
 2.13. \quad (\sqrt[n]{x})' &= \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad n = 2m+1, \quad m \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Найдите производные:

$$\begin{aligned}
 2.14. \quad f &= \operatorname{tg}^2 2x + \ln \cos x; \\
 2.15. \quad f &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{9-x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3} \right); \\
 2.16. \quad f &= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}; & 2.17. \quad f &= \sin \cos^2 x \cdot \cos \sin^2 x; \\
 2.18. \quad f &= \sqrt[4]{\frac{2x+1}{3x+4}}; & 2.19. \quad f &= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12}.
 \end{aligned}$$

3. Односторонние производные

3.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. *Правой производной* $f(x)$ в точке x_0 называют односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правая производная обозначается символом $f'(x_0 + 0)$ при $x_0 \neq 0$ и $f'(+0)$ при $x_0 = 0$. Аналогично определяется левая производная в точке x_0 , она обозначается $f'(x_0 - 0)$ при $x_0 \neq 0$ и $f'(-0)$ при $x_0 = 0$. Правая и левая производные называются *односторонними*.

Теорема 3.1. *Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют обе односторонние производные и они равны.*

Говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *положительную* (отрицательную) *бесконечную правую производную*, если

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= +\infty \\ \left(\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty \right). \end{aligned}$$

Аналогично определяется *положительная* (отрицательная) *бесконечная левая производная*.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Приведите пример непрерывной функции, не имеющей в некоторой точке ни одной из односторонних производных.

2). Верно ли утверждение: если функция имеет в точке обе односторонние производные, то она дифференцируема в этой точке?

3.3. Примеры решения задач.

Найти правую и левую производные функции в указанной точке.

Пример 3.1. $f = |x|$, $x_0 = 0$.

▷ Используя определения односторонних производных, имеем

$$\begin{aligned} f'(+0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x + 0| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \\ f'(-0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 3.2. $f = \sqrt[3]{(|x| + x)^2}$, $x_0 = 0$.

▷ Используя определение модуля, представим функцию f в виде

$$f = \begin{cases} \sqrt[3]{4x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

По определению правой производной имеем

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{4(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \sqrt[3]{4} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty.$$

Аналогично, по определению левой производной получаем

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} 0 = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 3.3. $f = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2 - x, & x < 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

▷ Как и в предыдущих примерах, можно найти односторонние производные по определению. Однако, здесь удобнее использовать другой способ. Функция f «склеена» из двух частей: функций $f_1 = x^2$ и $f_2 = 2 - x$ ($x_0 = 1$ — точка «склейки»). Функция f_1 дифференцируема при любом x , следовательно, существует $f'_1(1)$ и по теореме 3.1 существует $f'_1(1 + 0)$, причем

$$f'_1(1 + 0) = f'_1(1) = (x^2)'|_{x=1} = 2.$$

Из равенства функций f_1 и f при $x \geq 1$ следует равенство их правых производных в точке $x_0 = 1$, т. е. $f'(1 + 0) = f'_1(1 + 0) = 2$. Аналогично,

$$f'(1 - 0) = f'_2(1 - 0) = f'_2(1) = (2 - x)'|_{x=1} = -1. \quad \triangleleft$$

Пример 3.4. $f = |\sin 3x|$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

▷ Для нахождения односторонних производных применим метод примера 3.3. Рассмотрим функцию $f(x) = |\sin 3x|$ в интервале $(0, 2\pi/3)$. В этой окрестности точки $x_0 = \pi/3$ слева от $x_0 = \pi/3$ выполняется неравенство $\sin 3x > 0$, а справа — неравенство $\sin 3x < 0$. Поэтому в рассматриваемой окрестности функцию f можно представить в виде

$$f = \begin{cases} \sin 3x, & 0 < x \leq \pi/3, \\ -\sin 3x, & \pi/3 < x < 2\pi/3. \end{cases}$$

Следовательно, в рассматриваемой окрестности функцию f можно рассматривать как «склеенную» из функций $f_1 = \sin 3x$ и $f_2 = -\sin 3x$, причем $f = f_1$ при $0 < x \leq \pi/3$ и $f = f_2$ при $\pi/3 < x < 2\pi/3$. Учитывая дифференцируемость f_1 , f_2 и используя теорему 3.1, находим

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) &= f'_1 \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) = f'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = (\sin 3x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} = \\ &= (3 \cos 3x)|_{x=\frac{\pi}{3}} = 3 \cos \pi = -3; \\ f' \left(\frac{\pi}{3} + 0 \right) &= f'_2 \left(\frac{\pi}{3} + 0 \right) = f'_2 \left(\frac{\pi}{3} \right) = (-\sin 3x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} = \\ &= (-3 \cos 3x)|_{x=\frac{\pi}{3}} = -3 \cos \pi = 3. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.5. $f = \arcsin x$, $x_0 = 1$.

▷ Область определения функции $f = \arcsin x$ — отрезок $[-1, 1]$. Поэтому функция не определена в правой полуокрестности точки $x_0 = 1$ и, следовательно, не имеет правой производной в этой точке. Левую производную найдем по определению. Имеем

$$\begin{aligned} f'(1-0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin(1 + \Delta x) - \arcsin 1}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin(1 + \Delta x) - \frac{\pi}{2}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $t = \arcsin(1 + \Delta x) - \frac{\pi}{2}$. Если $\Delta x \rightarrow -0$, то $t \rightarrow -0$. Тогда учитывая, что

$$\Delta x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + t \right) - 1 = \cos t - 1,$$

получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin(1 + \Delta x) - \frac{\pi}{2}}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{t}{\cos t - 1}.$$

Используя соотношение эквивалентности $1 - \cos t \sim t^2/2$ при $t \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{t}{\cos t - 1} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{-t}{\frac{t^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{-1}{t} = +\infty.$$

Итак, $f'(1 - 0) = +\infty$, т. е. в точке $x_0 = 1$ функция имеет левую положительную бесконечную одностороннюю производную. $\triangleleft$

Исследовать функцию на дифференцируемость в указанной точке.

Пример 3.6. $f = (x + 1)|x + 1|$, $x_0 = -1$.

$\triangleright$ Используя определение модуля, представим функцию в виде

$$f = \begin{cases} -(x + 1)^2, & x \leq -1 \\ (x + 1)^2, & x > -1. \end{cases}$$

Найдем односторонние производные функции f в нуле методом, изложенным в примере 3.3. Положим $f_1 = -(x + 1)^2$, $f_2 = (x + 1)^2$. Имеем

$$f'_1(-1 - 0) = f'_1(-1) = (-(x + 1)^2)'|_{x=-1} = -2(x + 1)|_{x=-1} = 0;$$

$$f'_2(-1 + 0) = f'_2(-1) = ((x + 1)^2)'|_{x=-1} = 2(x + 1)|_{x=-1} = 0.$$

Учитывая, что $f = f_1$, если $x \leq -1$, и $f = f_2$, если $x \geq -1$, получаем

$$f'(-1 - 0) = f'_1(-1) = 0; \quad f'(-1 + 0) = f'_2(-1 + 0) = 0.$$

Итак, $f'(-1 - 0) = f'(-1 + 0) = 0$. Отсюда по теореме 3.1 заключаем, что функция f дифференцируема в точке $x = -1$ и $f'(-1) = 0$. $\triangleleft$

Пример 3.7. $f = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

▷ Найдем односторонние производные, используя их определения:

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2};$$

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2}.$$

Односторонние производные в точке $x_0 = 0$ не равны. По теореме 3.1 функция в этой точке не дифференцируема. ◁

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите правую и левую производные функций в указанных точках.

3.1. $f = e^{|2x|}$, $x_0 = 0$; 3.2. $f = \sqrt[3]{x+5}$, $x_0 = -5$;

3.3. $f = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$; 3.4. $f = \sqrt{x^2} + x\sqrt{x}$, $x_0 = 0$;

3.5. $f = \begin{cases} (x+1)^2, & x \geq -1, \\ (x+1)^3, & x < -1, \end{cases} \quad x_0 = -1$;

3.6. $f = \arccos \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

Исследуйте функции на дифференцируемость в указанных точках.

3.7. $f = (x+2)^{2/3}$, $x_0 = -2$;

3.8. $f = \frac{1}{2}|x-1|^2$, $x_0 = 1$;

3.9. $f = |x^2 - 4x + 3|$, $x_0 = 3$.

4. Геометрический смысл производной

4.1. Основные понятия и теоремы. Секущей графика функции $f(x)$ называется прямая, проходящая через две его точки. Секущая, проходящая через точки $M(x_0, f(x_0))$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, имеет уравнение

$$y = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0), \text{ где } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 . *Касательной* к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ называется прямая, имеющая уравнение

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Пусть непрерывная функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет производной, но имеет бесконечные односторонние производные. Тогда угловой коэффициент $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ секущей к графику функции в точке x_0 имеет предел, равный $+\infty$ или $-\infty$. В этом случае касательной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$ называется прямая $x = x_0$.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равна пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ углового коэффициента $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ секущей к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, и, таким образом, $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$.

4.2. Теоретические упражнения.

1). В каких точках нельзя провести касательную к графику функции:

$$1) f = |x - a| + |x + b|; \quad 2) f = |ax^2 + bx + c|.$$

2). Определите, при каких соотношениях между параметрами a , b и c парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

касается оси OX ?

3). Определите, при каких соотношениях между параметрами p и q кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси OX ?

4). Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция и $f(x) > 0$. Докажите, что графики функций

$$y = f(x) \text{ и } y = f(x) \sin ax$$

в общих точках касаются (имеют общую касательную).

4.3. Примеры решения задач.

Пример 4.1. Написать уравнение касательной к графику функции $f = |x - 1|\sqrt[3]{x + 2}$ в точке $x_0 = 6$.

▷ Найдем производную функции. При $x > 1$ $|x - 1| = x - 1$, и функцию можно представить в виде $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x + 2}$. Отсюда

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x - 1)\sqrt[3]{x + 2} \right)' = \sqrt[3]{x + 2} + (x - 1) \frac{1}{3} (x + 2)^{-2/3} = \\ &= \frac{3(x + 2) + x - 1}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2}} = \frac{4x + 5}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2}}. \end{aligned}$$

Вычислим в точке $x_0 = 6$ значения функции и ее производной:

$$f(6) = 5\sqrt[3]{8} = 10, \quad f'(6) = \frac{29}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{29}{12}.$$

Теперь запишем уравнение касательной $y = \frac{29}{12}(x - 6) + 10$.

Упростив это уравнение, окончательно получим $y = \frac{29}{12}x - \frac{9}{2}$. ◁

Пример 4.2. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции $f = \sin 3x$ в точке $x_0 = 2\pi/3$?

▷ Функция $f = \sin 3x$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$, поэтому ее график имеет в любой точке x_0 касательную $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Пусть φ — угол ее наклона к оси OX . Из уравнения касательной имеем $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$. Учитывая, что $f' = 3 \cos 3x$ и $f'(2\pi/3) = 3 \cos 2\pi = 3$, для нахождения угла φ получаем уравнение $\operatorname{tg} \varphi = 3$. Отсюда $\varphi = \arctg 3$. ◁

Пример 4.3. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $f = x^2$ параллельна прямой $y = 2x + 1$.

▷ Функция $f = x^2$ дифференцируема при любом $x \in \mathbb{R}$. Поэтому ее график имеет касательную в каждой точке. Пусть x_0 — абсцисса искомой точки. Найдем в ней угловой коэффициент касательной к графику: $f'(x_0) = 2x_0$. Рассматриваемая касательная должна быть параллельна прямой $y = 2x + 1$. Поскольку угловой коэффициент прямой равен 2, а угловые коэффициенты параллельных прямых должны быть равны, получаем $2x_0 = 2$, т. е. $x_0 = 1$. Итак, искомой является точка $(1, 1)$. ◁

Пример 4.4. *Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций $f_1 = \sqrt{2} \sin x$ и $f_2 = \sqrt{2} \cos x$ (углом между графиками функций в точке их пересечения называется угол между касательными к этим графикам в данной точке).*

▷ Для определения абсцисс x_k точек пересечения графиков функций $f_1 = \sqrt{2} \sin x$ и $f_2 = \sqrt{2} \cos x$ решим уравнение $\sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} \cos x$. Получим $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найдем ординаты точек пересечения:

$$y_k = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = \sqrt{2} (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1)^k.$$

Таким образом, графики пересекаются в точках $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, (-1)^k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Для нахождения угла между графиками в точках их пересечения найдем угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к графикам в этих точках. Имеем

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1' \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = \sqrt{2} (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1)^k; \\ k_2 &= f_2' \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = -\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = \\ &= -\sqrt{2} (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $k_1 \cdot k_2 = (-1)^k (-1)^{k+1} = -1$. Это означает, что касательные перпендикулярны друг к другу в рассматриваемых точках, т. е. графики пересекаются под углом $\pi/2$. ◁

Пример 4.5. *Под какими углами график функции $f = \sin x$ пересекает ось абсцисс?*

▷ График функции $f = \sin x$ пересекает ось OX в точках $x = \pi n$, $k \in \mathbb{Z}$. Если n четно, т. е. $n = 2k$, то $x = 2\pi k$ и $y'(2\pi k) = \cos 2\pi k = 1$. Поэтому в точках $x = 2\pi k$ угловой коэффициент касательной к графику $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Следовательно, в этих точках график пересекает ось OX под углом $\varphi = \pi/4$. Если n нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то

$$x = (2k + 1)\pi, \quad y'((2k + 1)\pi) = \cos((2k + 1)\pi) = -1.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \varphi = -1$, и поэтому в точках $x = (2k + 1)\pi$ график пересекает ось OX под углом $\varphi = 3\pi/4$. ◁

Существует ли касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 ? Является ли функция f дифференцируемой в точке x_0 ?

Пример 4.6. $f = \sqrt[3]{\sin x}$, $x_0 = 0$.

▷ Найдем производную функции $f(x)$ в точке x_0 по определению (правило дифференцирования сложной функции применить нельзя, так как функция $\sqrt[3]{y}$ не дифференцируема в нуле). Имеем

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\sin \Delta x} - 0}{\Delta x} = \sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \rightarrow +\infty,$$

поскольку $\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \rightarrow 1$, а $\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \rightarrow +\infty$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

следует, что данная функция в точке x_0 не дифференцируема, однако она является в этой точке непрерывной и ее график имеет в точке $(0, 0)$ касательную, уравнение которой $x = 0$. ◁

Пример 4.7. $f = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{при } x < -1, \\ (x+1)^3, & \text{при } x \geq -1, \end{cases} \quad x_0 = -1.$

▷ Для выяснения вопроса о существовании производной функции f в точке $x = -1$ применим метод, изложенный в примере 3.3. Функция f «склеена» из функций $f_1 = (x+1)^2$ и $f_2 = (x+1)^3$. Имеем

$$\begin{aligned} f'(-1-0) &= f'_1(x+1) = 2(x+1)|_{x=-1} = 0, \\ f'(-1+0) &= f'_2(x+1) = 3(x+1)^2|_{x=-1} = 0, \\ f'(-1-0) &= f'(-1+0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует $f'(-1) = 0$, т.е. функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = -1$ и ее график имеет в точке $(-1, 0)$ касательную $y = 0$. ◁

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке x_0 .

$$4.1. \quad f = \sqrt{5-x^2}, \quad x_0 = 1; \quad 4.2. \quad f = \operatorname{arctg} 2x, \quad x_0 = 0.$$

Определите угол касательной к графику функции f в точке x_0 с осью абсцисс.

$$4.3. \quad f = \ln x, \quad x_0 = 1; \quad 4.4. \quad f = -x^2 + 4x - 17, \quad x_0 = 2, 5.$$

Найдите точки, в которых касательная к графику функции f параллельна заданной прямой.

$$4.5. f = 2 + x - x^2, \quad y = 0; \quad 4.6. f = x^3 - 13x, \quad y = -x;$$

$$4.7. f = (3 - x^2)e^x, \quad y = 0.$$

Определите, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций f_1 и f_2 :

$$4.8. f_1 = x - x^3, \quad f_2 = 5x; \quad 4.9. f_1 = \frac{1}{x}, \quad f_2 = \sqrt{x}.$$

Существует ли касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 ? Дифференцируема ли функция f в точке x_0 ?

$$4.10. f = |3x + 2|, \quad x_0 = -2/3; \quad 4.11. f = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0;$$

$$4.12. f = \begin{cases} e^x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 + x - 1/4, & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$4.13. f = \sqrt{|x^2 - 1|}, \quad x_0 = 1.$$

В каких точках график данной функции имеет вертикальные касательные? Запишите их уравнения.

$$4.14. f = \sqrt[3]{x - 5};$$

$$4.15. f = f = \sqrt{|x + 1|}.$$

5. Производные высших порядков.

5.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) . Производную $f'(x)$ называют *производной первого порядка*. Если производная $f'(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она называется *производной второго порядка* и обозначается одним из символов:

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Если $(n - 1)$ -я производная функции $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то эта производная называется *производной n -го порядка*, или *n -й производной* функции $f(x)$ в точке x_0 , она обозначается $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$. Таким образом, производ-

ные высших порядков определяются индуктивно по формуле $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Иногда в обозначениях производных высших порядков аргумент опускают (так же, как и для производной первого порядка).

Правила вычисления производных n -го порядка

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}; \quad (5.1)$$

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad (5.2)$$

$$(f(\alpha x + \beta))^{(n)} = \alpha^n f^{(n)}(t) \Big|_{t=\alpha x+\beta}. \quad (5.3)$$

Таблица производных n -го порядка основных элементарных функций

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x; \quad (5.4)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right); \quad (5.5)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right); \quad (5.6)$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}; \quad (5.7)$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}. \quad (5.8)$$

5.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите следующие утверждения:

1) Если $m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(m)} = m!;$$

2) Если $P_n(x)$ — многочлен степени n , то

$$P_n^{(k)}(x) \equiv 0 \quad \text{при } k > n.$$

2). Найдите $f^{(n)}$, если:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad \neq cd).$$

5.3. Примеры решения задач.

Найти производную указанного порядка.

Пример 5.1. $f = 3x^2 - 4x + 1$, $f^{(3)}$.

▷ Находим последовательно $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$:
 $f^{(1)} = (3x^2 - 4x + 1)' = 6x - 4$, $f^{(2)} = (6x - 4)' = 6$, $f^{(3)} = 6' = 0$.
 ◁

Пример 5.2. $f = \sin 5x$, $f^{(4)}$.

▷ По формуле (5.3)

$$f^{(4)} = (\sin 5x)^{(4)} = 5^4 (\sin t)^{(4)} \Big|_{t=5x}.$$

Используя формулу (5.5) n -й производной для функции $\sin t$ при $n = 4$, имеем

$$(\sin t)^{(4)} = \sin \left(t + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \sin t.$$

И, наконец, $f^{(4)} = 625 \sin 5x$.
 ◁

Доказать формулы.

Пример 5.3. $(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$.

▷ Докажем формулу методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $f^{(1)} = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, т.е. формула верна. Предположим, что она верна при $n = k$, т.е. $(\sin x)^{(k)} = \sin \left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} \right)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(k+1)} &= \left(\sin \left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \\ &= \cos \left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + (k+1) \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, формула верна и при $n = k + 1$. Отсюда следует, что она верна при любом натуральном n .
 ◁

Пример 5.4. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$.

▷ Докажем справедливость формулы методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $f^{(1)} = \alpha x^{\alpha-1}$, т.е. формула верна. Предположим, что формула справедлива при $n = k$, т.е.

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)x^{\alpha-k}.$$

Тогда, дифференцируя еще раз, получим

$$\begin{aligned}(x^\alpha)^{(k+1)} &= (\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k})' = \\ &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)x^{\alpha-k-1} = \\ &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)x^{\alpha-(k+1)}.\end{aligned}$$

Таким образом, формула доказана. $\triangleleft$

Найти $f^{(n)}$, пользуясь таблицей производных n -го порядка.

Пример 5.5. $f = \ln(1+x)$.

$\triangleright$ Используя правило (5.3) и формулу (5.8) для n -й производной функции $y = \ln x$, получаем

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (\ln t)^{(n)} \Big|_{t=1+x} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}. \quad \triangleleft$$

Пример 5.6. $f = \sqrt{1-x}$.

$\triangleright$ Сделаем замену переменной $t = 1-x$ и найдем сначала n -ю производную функции $\sqrt{t}$, используя формулу (5.7) при $\alpha = 1/2$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{t})^{(n)} &= (t^{1/2})^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right) t^{1/2-n} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-3}{2}\right) t^{1/2-n} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n} t^{1/2-n}.\end{aligned}$$

Применяя теперь формулу (5.3) с $\alpha = -1$, получаем

$$\begin{aligned}(\sqrt{1-x})^{(n)} &= (-1)^n (t^{1/2})^{(n)} \Big|_{t=1-x} = \\ &= -\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{1/2-n}. \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Пример 5.7. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ первую производную, но не имеет второй.

▷ Сначала найдем в точке $x = 0$ односторонние производные:

$$f'(-0) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)' \Big|_{x=0} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$f'(+0) = (1)' = 0.$$

Получили, что в точке $x = 0$ существуют обе односторонние производные 1-го порядка, причем $f'(-0) = f'(+0) = 0$. По теореме 3.1 заключаем, что $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производную и $f'(0) = 0$. Теперь найдем односторонние производные 2-го порядка:

$$f''(-0) = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' \Big|_{x=0} = - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \Big|_{x=0} = -1;$$

$$f''(+0) = 0.$$

Итак, $f''(-0) \neq f''(+0)$. Следовательно, $f''(0)$ не существует. <

Пример 5.8. *Определить, производные какого порядка имеет функция $f(x) = |x|^3$ в точке $x = 0$.*

▷ Найдем $f'(0)$ по определению производной:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x |\Delta x|) = 0.$$

Таким образом, установлено существование 1-й производной при $x = 0$. Если $x > 0$, то $f(x) = x^3$ и $f'(x) = 3x^2$; если $x < 0$, то $f(x) = -x^3$ и $f'(x) = -3x^2$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет производную 1-го порядка для любого $x \in \mathbb{R}$, причем

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Найдем $f''(0)$. По определению односторонних производных имеем

$$f''(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0;$$

$$f''(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} -\frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0.$$

Итак, $f''(+0) = f''(-0) = 0$. Применяя к функции $f'(x)$ в точке $x = 0$ теорему 3.1, получаем, что существует $f''(0) = 0$. Если $x > 0$, то $f''(x) = (3x^2)' = 6x$; если $x < 0$, то $f''(x) = (-3x^2)' = -6x$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет производную 2-го

порядка для любого $x \in \mathbb{R}$, причем $f''(x) = 6|x|$. Поскольку функция $g = |x|$ не дифференцируема в нуле, то и $f''(x)$ не имеет в нуле производной, т.е. $f^{(3)}(0)$ не существует. Итак, функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производные до 2-го порядка включительно. $\triangleleft$

5.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите производные указанного порядка:

$$5.1. f = x^5 \ln x, \quad f^{(3)}; \qquad 5.2. f = x^2 e^{2x}, \quad f^{(4)}.$$

Докажите формулы:

$$5.3. (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right);$$

$$5.4. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

Найдите $f^{(n)}$, пользуясь таблицей n -х производных:

$$5.5. f = (1+x)^\alpha; \quad 5.6. f = \log_a x; \quad 5.7. f = \frac{1+x}{1-x}.$$

Докажите следующие утверждения:

$$5.8. \text{ Если } m \in \mathbb{N}, \text{ то } (x^m)^{(m)} = m!;$$

$$5.9. \text{ Если } P_n(x) \text{ — многочлен степени } n, \text{ то } P_n^{(k)}(x) \equiv 0 \text{ при } k > n.$$

6. Производные функции, заданной параметрически

6.1. Основные понятия и теоремы. Пусть даны две функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

определенные в промежутке T изменения переменной t , которую назовем *параметром*. Множества значений функций обозначим X и Y соответственно, т.е. положим $X = E(\varphi)$, $Y = E(\psi)$. Для каждого $t \in T$ значению $x = \varphi(t)$ поставим в соответствие значение $y = \psi(t)$. Если при этом любому $x \in X$ соответствует ровно одно значение $y \in Y$, то получим функцию $f: X \rightarrow Y$. Такую функцию называют *функцией, заданной параметрически*.

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия:

- 1) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены в интервале T ;
- 2) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в интервале T ;
- 3) $\varphi'(t)$ сохраняет знак в интервале T .

Тогда формулы (6.1) определяют параметрически заданную функцию $f: X \mapsto Y$, которая для любого $x \in X$ имеет производную и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия:

- 1) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены в интервале T ;
- 2) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные второго порядка в интервале T ;
- 3) $\varphi'(t)$ сохраняет знак в интервале T .

Тогда формулы (6.1) определяют параметрически заданную функцию $f: X \mapsto Y$, которая для любого $x \in X$ имеет вторую производную, причем справедливы формулы:

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}, \quad (6.1)$$

$$f''(x) = \frac{\psi''(t) \cdot \varphi'(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \quad (6.2)$$

6.2. Теоретические упражнения.

- 1). Докажите, что график параметрически заданной функции

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in (0, \pi)$$

представляет собой верхнюю половину окружности радиуса a с центром в начале координат. Напишите уравнение касательной к графику в точке $M(x(t), y(t))$.

- 2). Докажите, что график параметрически заданной функции

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in (0, \pi)$$

представляет собой верхнюю половину эллипса с полуосями a и b и с центром в начале координат. Напишите уравнение касательной к графику в точке $M(x(t), y(t))$.

3). Докажите, что параметрически заданная функция

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

есть периодическая функция, определенная и дифференцируемая на всей числовой оси. При каких график этой функции (циклоида) имеет касательную, параллельную одной из координатных осей?

4). Докажите, что при любом $c > 0$ параметрически заданная функция

$$x = ce^{-t} - 2t + 2, \quad y = c(1+t)e^{-t} - t^2 + 2, \quad t \in \mathbb{R}$$

является дифференцируемой и при всех t удовлетворяет равенству

$$y = (1 + y')x + (y')^2.$$

6.3. Примеры решения задач.

Найти $f'(x)$ и $f''(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

Пример 6.1. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 < t < 2\pi$.

▷ Функции $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$ дифференцируемы при всех T : $\varphi'(t) = 1 - \cos t$, $\psi'(t) = \sin t$. Кроме того, $\varphi'(t) > 0$ в интервале $(0, 2\pi)$. По формуле (6.1) имеем: $f'(x) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$. Для нахождения $f''(x)$ воспользуемся формулой (6.2). Все условия ее применимости выполнены: функции $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ дифференцируемы при любом $t \in \mathbb{R}$, причем $\varphi''(t) = \sin t$; $\psi''(t) = \cos t$. Для каждого $t \in (0, 2\pi)$ выполняется неравенство $\varphi'(t) > 0$. По формуле (6.2) получаем

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^3} = \\ &= \frac{\cos t - (\sin^2 t + \cos^2 t)}{(1 - \cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 6.2. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

▷ Для нахождения $f'(x)$ применим формулу (6.1). Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= a \cos^3 t, & \psi(t) &= a \sin^3 t; \\ \varphi'(t) &= -3a \cos^2 t \sin t, & \psi'(t) &= 3a \sin^2 t \cos t < 0 \\ & & & \text{в интервале } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

По формуле (6.1) получаем

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Теперь найдем $f''(x)$. Условия теоремы 6.1 выполнены, так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ имеют производные при любом $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi'(t) < 0$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В данном случае $f''(x)$ удобнее находить по формуле (6.1):

$$f''(x) = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$$

Видим, что применение формулы (6.1) позволило избежать нахождения $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$ и упростить вычисления. <

6.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите $f'(x)$ и $f''(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

$$6.1. \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 < t < \pi;$$

$$6.2. \quad x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad \frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}.$$

7. Дифференциал функции

7.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 . Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная функция приращения Δx , обозначаемая символом $df(x_0)$ и определяемая формулой

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (7.1)$$

Для функции $f(x) = x$ по определению дифференциала имеем $df(x_0) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Поэтому $\Delta x = dx$ и формулу (7.1) можно записать в виде

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Дифференциал функции существует в любой точке, в которой функция имеет производную. Поэтому функцию, имеющую производную в точке, называют также *дифференцируемой* в этой точке, а операцию нахождения производной — *дифференцированием*.

Теорема 7.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x , то ее приращение в этой точке представимо в виде*

$$f(x + \Delta x) - f(x) = df(x) + o(\Delta x).$$

Для приближенного вычисления значений функции $f(x + \Delta x)$ при заданном значении Δx применяют формулу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x).$$

Эта формула дает абсолютную погрешность

$$\delta = |f(x + \Delta x) - f(x) - df(x)| = |\Delta f(x) - df(x)|,$$

причем из теоремы 7.1 следует, что $\delta = o(\Delta x)$.

Свойства дифференциала.

Для любых дифференцируемых функций f и g справедливы равенства:

$$\begin{aligned} d(f \pm g) &= df \pm dg, & d(\lambda \cdot f) &= \lambda \cdot df \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ d(f \cdot g) &= df \cdot g + f \cdot dg, & d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2} \quad (g \neq 0). \end{aligned}$$

Формула для дифференциала $df(x) = f'(x) \cdot dx$ верна не только в том случае, когда x — независимая переменная, а и в случае, когда x — функция некоторой другой переменной. Это свойство называют свойством *инвариантности (или неизменности) формы* дифференциала.

Пусть $M(x_0, f(x_0))$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ — точки на графике дифференцируемой функции $f(x)$. Касательная к графику функции в точке M имеет уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx , имеет вид

$$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f'(x_0) \cdot dx = df(x_0).$$

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$.

7.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите формулы об арифметических операциях над дифференциалами.

2). Докажите формулу:

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} + o(x) \quad (a > 0).$$

3). Докажите формулу:

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} + o(x) \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}).$$

7.3. Примеры решения задач.

Пример 7.1. Найти дифференциал функции $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$ в точке $x_0 = \pi/9$.

▷ Вычислим значение производной:

$$f'(x) = -\frac{3}{\sin^2 3x}; \quad f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = -\frac{3}{\sin^2(\pi/3)} = -4.$$

По формуле (7.1) имеем $df(\pi/9) = f'(\pi/9) dx = -4 dx$. ◁

Пример 7.2. Заменяя приращение функции $f = 5x^2$ дифференциалом, вычислить приближенно $f(2 + \Delta x)$ при $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta x = 0,001$. Найти абсолютную погрешность полученных результатов.

▷ Для приближенного вычисления значений функции $f(2 + \Delta x)$ при заданных значениях Δx необходимо применить формулу $f(2 + \Delta x) \approx f(2) + df(2)$. Сначала вычислим значение функции в точке $x = 2$: $f(2) = 20$, затем найдем дифференциал в точке $x = 2$. Имеем $f'(x) = 10x$, $df(2) = f'(2)\Delta x = 20\Delta x$.

Теперь вычислим приближенно $f(2 + \Delta x)$ по формуле $f(2 + \Delta x) \approx f(2) + df(2)$ при заданных значениях Δx :

$$\begin{aligned} \text{если } \Delta x = 1, \text{ то} \quad & df(2) = 20 \cdot 1 = 20, \\ & f(2 + 1) \approx 20 + 20 = 40; \\ \text{если } \Delta x = 0,1, \text{ то} \quad & df(2) = 20 \cdot 0,1 = 2, \\ & f(2 + 0,1) \approx 20 + 2 = 22; \\ \text{если } \Delta x = 0,001, \text{ то} \quad & df(2) = 20 \cdot 0,001 = 0,02, \\ & f(2 + 0,001) \approx 20 + 0,02 = 20,02. \end{aligned}$$

Теперь найдем абсолютные погрешности полученных приближенных значений функции по формуле $\delta = |\Delta f(2) - df(2)|$:

$$\begin{aligned} \Delta f(2) &= f(2 + \Delta x) - f(2) = 5(2 + \Delta x)^2 - 20 = 5(4\Delta x + (\Delta x)^2); \\ \text{если } \Delta x = 1, \text{ то} \quad & \Delta f(2) = 5(4 \cdot 1 + 1^2) = 25, \\ & \delta = |25 - 20| = 5; \\ \text{если } \Delta x = 0,1, \text{ то} \quad & \Delta f(2) = 5(4 \cdot 0,1 + (0,1)^2) = 2,05, \\ & \delta = |2,05 - 2| = 0,05; \\ \text{если } \Delta x = 0,001, \text{ то} \quad & \Delta f(2) = 5(4 \cdot 0,001 + (0,001)^2) = 0,020005, \\ & \delta = |0,020005 - 0,02| = 0,000005. \end{aligned}$$

Видим, что абсолютная погрешность быстро убывает при уменьшении приращения аргумента Δx . $\triangleleft$

Пример 7.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt[3]{7,99}$.

$\triangleright$ Применим формулу $f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x)$. Число $\sqrt[3]{7,99}$ является значением функции $\sqrt[3]{x}$ при $x = 7,99$. Поэтому положим $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и приближенная формула принимает вид

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Положив в этой формуле $x = 8$, $\Delta x = -0,01$, находим

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7,99} &= \sqrt[3]{8 - 0,01} \approx \sqrt[3]{8} - \frac{0,01}{3\sqrt[3]{8^2}} = \\ &= 2 - \frac{1}{1200} = 2 - 0,001 = 1,999. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 7.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, выведите приближенную формулу для вычисления $\sin(30^\circ + \alpha)$ при малых α (α задано в градусах).

▷ Положим $f(x) = \sin x$, $x = \pi/6$, $\Delta x = \pi\alpha/180$ (градусную меру аргумента переводим в радианную). Имеем:

$$df(x) = \cos x \cdot \Delta x; \quad df\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \Delta x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta x;$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) = \sin(30^\circ + \alpha).$$

Применив формулу $f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x)$, получим

$$\sin(30^\circ + \alpha) \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}\alpha. \quad \triangleleft$$

7.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$7.1. \quad f = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = e; \quad 7.2. \quad f = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7.3. Заменяя приращение функции $f = x^3 - 2x + 1$ дифференциалом, вычислите приближенно $f(1 + \Delta x)$ при $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta x = 0,01$. Найдите абсолютную погрешность полученных результатов.

7.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\lg 11$.

7.5. Заменяя приращение функции дифференциалом, выведите приближенную формулу для вычисления $\cos(120^\circ + \alpha)$ при малых α (α задано в градусах).

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

1.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 1.1 (о связи дифференцируемости и непрерывности). *Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.*

Теорема 1.2 (Ферма). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

- 1) $f(x)$ определена в интервале (a, b) , $x_0 \in (a, b)$;
- 2) в интервале (a, b) $f(x_0) \geq f(x)$ [$f(x_0) \leq f(x)$];
- 3) существует $f'(x_0)$.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема 1.3 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

- 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) ;
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Теорема 1.4 (Коши). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

- 1) $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$;
- 2) $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ в (a, b) .

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{— формула Коши.}$$

Теорема 1.5 (Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

- 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) .

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ — формула Лагранжа.}$$

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Полагая в формуле Лагранжа $a = x_0$, $b - a = \Delta x$, $c = x_0 + \theta \Delta x$, где $\theta \in (0, 1)$, получаем формулу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x, \quad (1.1)$$

которую называют *формулой конечных приращений*.

1.2. Теоретические упражнения.

1). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- а) $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$;
- б) $f(x)$ имеет вторую производную в интервале (a, b) ;
- в) $f(a) = f'(a) = 0$; $f(b) = 0$.

Докажите, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f'(c) = 0.$$

2). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- а) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при $x \geq x_0$;
- б) $f(x_0) = g(x_0)$;
- в) $f'(x) > g'(x)$ при $x > x_0$.

Докажите, что $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$.

3). Выясните, останется ли справедливой теорема Ролля, если не будет выполнено условие:

- а) $f(a) = f(b)$; б) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Приведите соответствующие примеры.

4). Докажите: между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

5). При каких условиях к функции $f(x) = 1/(x - p)$ на отрезке $[a, b]$ применима теорема Лагранжа?

6). Докажите, что все корни производной от многочлена

$$P(x) = (x + a)(x - a)(x - b),$$

где $0 < a < b$, действительны. Укажите границы, между которыми они заключены.

1.3. Примеры решения задач.

Пример 1.1. Верно ли, что всякая непрерывная в точке функция дифференцируема в этой точке?

▷ Данное утверждение неверно. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = |x|$. Она непрерывна при любом $x \in \mathbb{R}$, в точке $x = 0$ имеет односторонние производные $f'(-0) = -1$, $f'(0+) = 1$ (пример 3.1, глава 1), причем $f'(-0) \neq f'(0+)$. По теореме 3.1 отсюда следует, что данная функция не дифференцируема при $x = 0$. ◁

Пример 1.2. Доказать утверждение: если функции f и g имеют производные в некоторой точке, то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ непрерывна в этой точке.

▷ Пусть функции f и g имеют производные в точке x_0 . Тогда по теореме 1.1 они непрерывны в этой точке. Отсюда следует, что в точке x_0 непрерывна и функция $\alpha f + \beta g$ (произведение непрерывной функции на число и сумма двух непрерывных функций являются непрерывными функциями). ◁

Пример 1.3. Доказать утверждение: если $f(x) = x(x + 1) \times (x + 2)(x + 3)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет три различных действительных корня.

▷ Функция $f(x)$ — многочлен и, следовательно, она непрерывна и дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$. Кроме того, $f(x)$ обращается в нуль в точках -3 , -2 , -1 , 0 , являющихся корнями многочлена. Докажем, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[-3, -2]$. На этом отрезке функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $f(x)$ непрерывна на $[-3, -2]$, дифференцируема в $(-3, -2)$, $f(-3) = f(-2)$. По теореме Ролля существует точка $c \in (-3, -2)$, удовлетворяющая уравнению $f'(c) = 0$. Аналогично доказывается, что это уравнение имеет еще два действительных корня: один в интервале $(-2, -1)$, а другой в интервале $(-1, 0)$. ◁

Пример 1.4. Доказать, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет единственный действительный корень.

▷ Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Она непрерывна и дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$, причем $f'(x) = 3x^2 + 3$. Сначала покажем, что уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень. Для этого применим теорему о промежуточных значениях непрерывной функции: если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$. Для функции $f(x)$ имеем: $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 8 > 0$. Поэтому на отрезке $[1, 2]$ есть точка c , в которой $f(c) = 0$, а это означает, что уравнение имеет один действительный корень. Докажем, что других действительных корней у этого уравнения нет. Допустим противное: пусть уравнение имеет два корня x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Согласно этой теореме между x_1 и x_2 есть точка t , в которой $f'(t) = 0$. А это невозможно, так как $f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень. ◁

Пример 1.5. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

▷ Не ограничивая общности, можно считать, что $x < y$. Функция $f(z) = \cos z$ на отрезке $[x, y]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа: $f(z)$ непрерывна на $[x, y]$ и дифференцируема в (x, y) , причем $f'(z) = -\sin z$. По теореме Лагранжа имеем

$$\cos y - \cos x = f'(t)(y - x), \quad \text{где } t \in (x, y).$$

Переходя к модулям и учитывая, что $|f'(t)| = |-\sin t| \leq 1$ для любого t , получим

$$|\cos y - \cos x| = |-\sin t||y - x| \leq |y - x|. \quad \triangleleft$$

Пример 1.6. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f'(x) = 0$ в интервале (a, b) , то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$.

▷ Пусть $x \in (a, b]$. Для функции $f(x)$ на отрезке $[a, x]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. По этой теореме имеем

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x - a), \quad \text{где } t \in (a, x).$$

Учитывая, что по условию $f'(t) = 0$, откуда получаем $f(x) - f(a) = 0$, т. е. $f(x) = f(a)$ для любого $x \in [a, b]$. А это означает, что $f(x)$ является постоянной на отрезке $[a, b]$. $\triangleleft$

Пример 1.7. Доказать, что

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \text{при} \quad |x| \leq 1.$$

$\triangleright$ Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Она определена на отрезке $[-1, 1]$, дифференцируема в интервале $(-1, 1)$ и

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

В силу утверждения, доказанного в примере 1.6, $f(x) = C$ для любого $x \in [-1, 1]$. Для нахождения значения постоянной C положим $x = 0$ и найдем $f(0)$. Имеем

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = f(0) = \frac{\pi}{2};$$

отсюда следует, что $C = \pi/2$. Таким образом, тождество доказано. $\triangleleft$

Пример 1.8. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$ при $x > 0$.

$\triangleright$ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - (1 + x)$. Найдем ее производную: $f'(x) = e^x - 1$. Для любого $x > 0$ на отрезке $[0, x]$ функция $f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа. Применив формулу Лагранжа, получим

$$f(x) - f(0) = f'(t)x, \quad \text{где} \quad t \in (0, x).$$

Поскольку $x > 0$ и $f'(t) = e^t - 1 > 0$ при $t > 0$, то отсюда следует, что $f(x) - f(0) > 0$. Учитывая, что

$$f(0) = e^0 - (1 + 0) = 1 - 1 = 0,$$

из последнего неравенства получаем $e^x - (1 + x) > 0$, т. е.

$$e^x > 1 + x. \quad \triangleleft$$

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

1.1. Верно ли утверждение: если функции f, g дифференцируемы в некоторой точке, то функции $f \cdot g$ и f/g непрерывны в этой точке?

1.2. Рассмотрим функции: $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x$. На отрезке $[-1, 1]$ у каждой из этих функций нет точки, в которой производная обращается нуль. Какое условие теоремы Ролля нарушено?

1.3. Докажите, что уравнение $3x^5 + 15x - 8 = 0$ имеет единственный действительный корень.

1.4. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$e^x - x - 1 = 0.$$

1.5. Верна ли формула Лагранжа для функции $f(x) = 1/x$ на отрезке $[a, b]$, если а) $ab < 0$; б) $ab > 0$.

Найдите на графике функции $f(x)$ точку, к которой касательная параллельна секущей, проходящей через точки A и B , если такая точка существует:

1.6. $f = x(x^2 - 1)$, $A(0; 0)$, $B(1; 0)$;

1.7. $f = x^3 + 3x + 1$, $A(-1; -3)$, $B(1; 5)$.

Докажите неравенства:

1.8. $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

1.9. $e^x > ex$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Докажите тождества:

1.10. $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;

1.11. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Правило Лопиталья

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1 (правило Лопиталья). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- 1) в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$;

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \right];$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \text{ где } L \in \mathbb{R} \text{ или } L = \infty.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Если все условия теоремы выполнены в правой [левой] окрестности точки x_0 , то теорема верна для правого [левого] предела функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в точке x_0 . Теорема справедлива и для пределов при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

В общем случае правило Лопиталя можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.2 (обобщенная формулировка правила Лопиталя). Пусть w — один из символов $\{a, a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$). Если функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(w)$ $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$;

$$2) \lim_{x \rightarrow w} f(x) = \lim_{x \rightarrow w} g(x) = 0 \left[\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \lim_{x \rightarrow w} g(x) = \infty \right],$$

$$3) \lim_{x \rightarrow w} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \text{ где } L \in \mathbb{R} \text{ или } L = \infty,$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \lim_{x \rightarrow w} g(x) = 0 \left[\lim_{x \rightarrow w} f(x) = \lim_{x \rightarrow w} g(x) = \infty \right],$$

то $\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)}$ называется *неопределенностью вида* $\frac{0}{0}$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, а вычисление предела *раскрытием неопределенности*.

2.2. Теоретические упражнения.

1). Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы о правиле Лопиталя и пусть не существует

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Следует ли отсюда, что не существует

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)}?$$

2). Докажите, что:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ при любом $a > 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \ln x = 0$ при любом $a > 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \ln x = +\infty$ при любом $0 < a < 1$.

2.3. Примеры решения задач.

Найти предел функции.

Пример 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

▷ Числитель и знаменатель дроби определены в окрестности точки $x = 0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arctg} x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

Таким образом, данный предел есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Далее, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ и $g'(x) = 3x^2$ существуют в окрестности точки $x = 0$, причем $g'(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Наконец, существует предел отношения производных

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, применимо правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

Вычисление предела по правилу Лопиталья обычно сразу записывают в виде цепочки равенств, убеждаясь в существовании нужных производных и пределов в ходе самих вычислений. При необходимости правило Лопиталья применяют повторно до

тех пор, пока не раскроется неопределенность или не обнаружится, что получившийся предел не существует.

Пример 2.2. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}.$

▷ Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(\arcsin(x-1))'}{(\sqrt{x^2+x-2})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x+1)\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{0}{3 \cdot 1} = 0. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.3. $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$

▷ Под знаком предела стоит произведение $f(x) \cdot g(x)$, где $f(x) = x$; $g(x) = \ln x$. При этом $\lim_{x \rightarrow +0} x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$. Такой предел называется неопределенностью вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем его к виду $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 2.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}.$

▷ Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^9 - 1)}{x^4 - 1}.$$

Вновь получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя еще раз:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \frac{x^9 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \frac{9x^8}{4x^3} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}. \quad \triangleleft$$

Пример 2.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$.

▷ Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, то имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталля трижды, получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}$

▷ Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для упрощения данной дроби воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ и заменим функцию $x^2 \sin x$ в знаменателе дроби функцией x^3 . Затем применим правило Лопиталля:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

▷ Под знаком предела стоит разность двух функций, бесконечно больших при $x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$. Такой предел называется неопределенностью вида $\infty - \infty$. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, заменяя $\operatorname{ctg} x$ на $\operatorname{tg} x$ и приводя к общему знаменателю:

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}.$$

Получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых функций $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, а затем применим правило Лопиталля:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{2x \cos^2 x} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0. \quad \triangleleft$$

Пример 2.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$

▷ Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. При попытке использовать правило Лопиталя обнаруживаем, что отношение производных

$$\frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$. Между тем, исходный предел существует:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Таким образом, если при вычислении предела по правилу Лопиталя обнаруживается, что предел отношения производных не существует, то это означает неприменимость метода в рассматриваемом случае. Никакого вывода об исходном пределе на этом основании сделать нельзя. $\triangleleft$

Найти асимптоты графика функции.

Пример 2.9. $f = 3x + e^x.$

▷ Данная функция определена на всей числовой оси и не имеет точек разрыва. Следовательно, у графика нет вертикальных асимптот.

Ищем наклонные асимптоты. Начнем с правой асимптоты. Для нахождения углового коэффициента k прямой $y = kx + b$ пользуемся формулой:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}.$$

Первый из двух пределов равен 3, а второй представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которую раскроем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Таким образом, график данной функции не имеет правой наклонной асимптоты. Выясняем наличие левой наклонной асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \\ &= 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 3 + 0 = 3. \end{aligned}$$

Итак, $k = 3$. Находим коэффициент b по формуле:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Получим

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + e^x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 3x$ является левой наклонной асимптотой графика функции. $\triangleleft$

Пример 2.10. $f = xe^{1/x}$.

$\triangleright$ Функция имеет разрыв в точке $x = 0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow +0} xe^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -0} xe^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0.$$

Поскольку один из двух односторонних пределов равен $+\infty$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, а точка $x = 0$ — точкой разрыва 2-го рода. Ищем наклонные асимптоты. По формулам (11.1), часть 1, глава 3 имеем

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1; \\ b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{1/x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \end{aligned}$$

Итак, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика при $x \rightarrow +\infty$. Аналогичные вычисления показывают, что прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой и при $x \rightarrow -\infty$. $\triangleleft$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1};$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + 1/x)};$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x;$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{e^x};$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 + 2x - 15};$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln x};$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \sin x};$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x};$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1};$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}};$$

$$2.13. f = x^2 e^{1/x};$$

$$2.14. f = x^3 \ln x;$$

$$2.15. f = x + \frac{\ln x}{x}.$$

3. Формула Тейлора

3.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n . Многочленом Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке x_0 называется многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n , то существует окрестность точки x_0 , в которой справедливо равенство

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n), \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) называется *локальной формулой Тейлора n -го порядка с центром в точке x_0* . При $n = 1$ формула (3.1) превращается в формулу (1.1) бесконечно малых приращений.

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ в окрестности точки x_0 , то существует окрестность этой точки, в которой справедливо равенство

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}, \text{ где } \theta \in (0, 1). \quad (3.2)$$

При $n = 0$ формула (3.2) превращается в формулу (1.1) конечных приращений.

Функция $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется *остаточным членом порядка n формулы Тейлора*. Остаточный член

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

называют *остаточным членом в форме Пеано*, а формулу (3.1) — формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Остаточный член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

называют *остаточным членом в форме Лагранжа*, а формулу (3.2) — формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Существуют и другие формы записи остаточного члена.

Разложением функции $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке x_0 называется равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора в одной из форм записи.

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют также *формулой Маклорена*.

Теорема 3.3 (о единственности разложения). Если в окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

то многочлен $\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$ есть многочлен Тейлора функции $f(x)$.

Формулу (3.1) называют также *разложением функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ до члена n -го порядка*. Первый отличный от нуля одночлен многочлена Тейлора называют *главным членом* разложения, а степень этого одночлена — *порядком главного члена*.

Формулы Тейлора для основных элементарных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) \quad (3.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x) \quad (3.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x) \quad (3.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x) \quad (3.6)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x) \quad (3.7)$$

Отметим, что в разложениях функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ порядок остаточного члена на единицу выше степени многочлена Тейлора, так как в формулу (3.4) четные степени переменной x , а в формулу (3.5) — нечетные степени x входят с нулевыми коэффициентами.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что если существует $f'(a)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2). Докажите, что если существует $f''(a)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

3). Докажите формулы:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin(x+h) &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + o(h^4); \\ 2) \quad \cos(x+h) &= \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + o(h^4). \end{aligned}$$

3.3. Примеры решения задач.

Пример 3.1. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$ до члена третьего порядка.

▷ Найдем производные функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третьего порядка:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x; \\ f''(x) &= 2 \cos^{-3} x \sin x; \\ f'''(x) &= 6 \cos^{-4} x \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x. \end{aligned}$$

Вычислим значение функции и ее производных в точке $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{tg} 0 = 0; \\ f'(0) &= \cos^{-2} 0 = 1; \\ f''(0) &= 2 \cos^{-3} 0 \cdot \sin 0 = 0; \\ f'''(0) &= 6 \cos^{-4} 0 \cdot \sin^2 0 + 2 \cos^{-2} 0 = 2. \end{aligned}$$

По формуле (3.1) при $x_0 = 0$ получаем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{3!} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \quad \triangleleft$$

Пример 3.2. Разложить функцию $f(x) = x^2 e^x$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$ до члена четвертого порядка.

▷ Данная функция есть произведение x^2 и e^x . Чтобы получить разложение этой функции до члена с x^4 включительно, нужно разложить e^x до члена с x^2 и умножить полученное разложение на x^2 . Воспользуемся разложением (3.3) функции e^x , полагая $n = 2$ и учтем, что $x^2 o(x^2) = o(x^4)$. Получаем

$$f(x) = x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Согласно теореме 3.3 полученное разложение является искомым. $\triangleleft$

Пример 3.3. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$.

$\triangleright$ Преобразуем данную функцию по формуле $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ и сделаем замену переменной $t = 2x$. Получим $f(t) = (1 - \cos t)/2$. При этой замене окрестность точки $x = 0$ переходит в окрестность точки $t = 0$. Пользуясь разложением (3.5), получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(t) \right) = \\ &= \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{2 \cdot (2n)!} + r_{2n+1}(t). \end{aligned}$$

Возвращаемся к переменной x :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} + r_{2n+1}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

Согласно теореме единственности полученное разложение является искомым. $\triangleleft$

Пример 3.4. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$

по формуле Тейлора с центром в точке $x = 0$ до члена с x^4 . Найти $f^{(4)}(0)$.

$\triangleright$ Данную функцию можно рассматривать как произведение двух функций:

$$f_1 = 1 + x + x^2 \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{1}{1 - x + x^2}.$$

Функция f_1 является многочленом. Чтобы получить разложение функции f до члена с x^4 , разложим f_2 до члена с x^4 ; затем умножим полученное разложение на f_1 , объединяя слагаемые с x^k при $k > 4$ в $o(x^4)$. Сделаем замену переменной $t = -x + x^2$

и воспользуемся разложением функции $(1+t)^\alpha$ при $\alpha = -1$ до члена t^4 . Получим

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4).$$

Возвращаемся к переменной x и раскрываем скобки, выписывая члены с x^k при $k \leq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= 1 + x - x^2 + (x-x^2)^2 + (x-x^2)^3 + \\ &+ (x-x^2)^4 + o(x^4) = 1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^3 - \\ &- 3x^4 + x^4 + o(x^4) = 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Умножаем полученное разложение на f_1 и раскрываем скобки, включая слагаемые выше 4-го порядка в $o(x^4)$:

$$\begin{aligned} (1+x-x^3-x^4+o(x^4))(1+x+x^2) &= \\ &= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Пользуясь формулой

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{при } n = 4,$$

получаем

$$-2 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \implies f^{(4)}(0) = -48. \quad \triangleleft$$

Пример 3.5. Разложить функцию $\sqrt[3]{x}$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 1$ до члена с x^3 включительно.

▷ Преобразуем данную функцию: $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1+(x-1)}$. Сделав замену переменной $t = x - 1$, получим $f(t) = \sqrt[3]{1+t}$. При этой замене переменной δ -окрестность точки $x = 1$ переходит в δ -окрестность точки $t = 0$. Пользуясь разложением (3.7) с $\alpha = 1/3$ и $n = 3$, получаем

$$\begin{aligned} (1+t)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}t^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}t^3 + r_n(t) = \\ &= 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}t^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}t^3 + r_3(t) = \\ &= 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + \frac{5}{81}t^3 + r_3(t). \end{aligned}$$

Возвращаемся к переменной x :

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + r_3(x). \quad \triangleleft$$

Найти пределы функции.

С помощью формулы Тейлора можно раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, т.е. найти пределы вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Для этого нужно разложить числитель и знаменатель дроби по степеням $x - x_0$ до первого отличного от нуля члена числителя или знаменателя. При вычислении пределов используется локальная формула Тейлора, так как в ней явно указан порядок остаточного члена.

Пример 3.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$

▷ В знаменателе дроби стоит x^2 , поэтому числитель также разложим до члена 2-го порядка. Пользуясь разложением (3.7), имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+3x} &= (1+3x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 3x - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (3x)^2}{2!} + o(x^2) = \\ &= 1 + x - x^2 + o(x^2); \\ \sqrt{1+2x} &= (1+2x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2x)^2}{2!} + o(x^2) = \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Преобразуем числитель дроби, учитывая, что $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$. Получим

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x} = \\ &= 1 + x - x^2 + o(x^2) - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Завершаем вычисление предела:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}. \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Пример 3.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}.$

▷ Числитель дроби разложим до члена 4-го порядка, так как в знаменателе стоит x^4 . Пользуясь разложением (3.5), получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Чтобы разложить функцию $y = e^{-x^2/2}$, сделаем замену переменной $t = -x^2/2$ и воспользуемся формулой (3.3) при $n = 2$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2).$$

Возвращаясь к исходной переменной x , получаем разложение функции $y = e^{-x^2/2}$ по формуле Тейлора до члена 4-го порядка:

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2}{2!} + o\left(\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Преобразуем числитель данной дроби:

$$\begin{aligned}\cos x - e^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = \\ &= \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

и, наконец, вычисляем предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \quad \triangleleft$$

Продemonстрированный метод позволяет избежать громоздких вычислений, возникающих иногда при повторном применении правила Лопиталя. Следует, однако, иметь в виду, что для использования формулы Тейлора требуется существование производной соответствующего порядка в полной (а не проколотой) окрестности данной точки. Правило Лопиталя применимо

и в том случае, когда какая-либо из функций f или g не имеет производной в точке x_0 (пример 2.2).

Пример 3.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

▷ Вынесем за скобки x^2 , произведем замену переменной $t = \frac{1}{x}$, затем воспользуемся разложением (3.7):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2}{t^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} - 2 + o(t^2)}{t^2} = -\frac{1}{4}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$.

▷ Вынесем за скобки x^2 , произведем замену переменной $t = \frac{1}{x}$, затем воспользуемся разложением (3.6):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.10. Пользуясь разложением по формуле Тейлора 9-го порядка, вычислить приближенно значение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в точке $x = 0,2$. Оценить допущенную погрешность.

▷ Пользуясь формулой (3.6) с $n = 9$, напомним разложение функции $\ln(1+x)$ по формуле Тейлора 9-го порядка с центром в точке $x_0 = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^9}{9} + r_9(x).$$

Вычислим $\ln 1,2$ по формуле

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^9}{9},$$

где $x = 0,2$. Получим

$$\ln(1,2) \approx 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} - \dots + \frac{0,2^9}{9} \approx 0,1823215.$$

Для оценки погрешности используем остаточный член в форме Лагранжа

$$r_9(x) = \frac{f^{(10)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(10)!} (x - x_0)^{(10)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Пользуясь формулой (5.8) для n -й производной функции $y = \ln x$ (глава 1, пример 5.5), находим $\ln^{(10)}(1+x) = (-1)^9 \frac{(9)!}{(1+x)^{10}}$.

Полагая $x_0 = 0$, $x = 0,2$, имеем:

$$\begin{aligned} r_9(x) &= \frac{f^{(10)}(\theta x)}{(10)!} x^{10} = -\frac{9!}{10!(1+\theta x)^{10}} x^{10} = \\ &= -\frac{x^{10}}{10(1+\theta x)^{10}} = -\frac{0,2^{10}}{10(1+0,2\theta)^{10}} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Заменяя в знаменателе дроби $1 + 0,2\theta$ на 1, что при $\theta < 1$ лишь увеличивает ее значение, получаем оценку остаточного члена

$$|r_9(x)| = \frac{0,2^{10}}{10(1+0,2\theta)^{10}} < \frac{2^{10}}{10^{11}} = 1,024 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}.$$

Таким образом, получена оценка погрешности $\Delta < 10^{-7}$. ◁

Пример 3.11. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{при} \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

▷ Для получения оценки абсолютной погрешности нужно оценить разность между правой и левой частью приближенной формулы, т. е. разность $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Правая часть приближенной формулы представляет собой многочлен Тейлора 3-го порядка для функции $y = \sin x$. Он совпадает с многочленом 4-го порядка, так как в разложении (3.4) члены четной степени входят с нулевыми коэффициентами. Таким образом, для оценки погрешности нужно взять остаточный член 4-го порядка. Остаточный член в форме Лагранжа для функции $y = \sin x$ имеет

вид $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin^{(n+1)}(\theta x)$. По формуле (5.5), глава 1, для $\sin^{(n)}(x)$ находим

$$\sin^{(5)}(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x$$

и, полагая $n = 4$, имеем $r_4(x) = \frac{x^5}{5!} \cos(\theta x)$. Учитывая, что $|\cos x| \leq 1$ и по условию $|x| \leq \frac{1}{2}$, получаем оценку абсолютной погрешности Δ :

$$\Delta = \max_{|x| \leq 1/2} |r_4(x)| \leq \frac{(0,5)^5}{5!} = \frac{1}{3840} < 2,7 \cdot 10^{-4}. \quad \triangleleft$$

Пример 3.12. Сколько нужно взять членов в формуле Тейлора для функции e^x , чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до 10^{-3} ?

▷ Из разложения (3.3) получаем приближенную формулу

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Для оценки погрешности Δ используем остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{e^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

Учитывая, что $|x| \leq 1$, получаем $-1 \leq \theta x \leq 1$, $e^{\theta x} \leq e$ и, следовательно,

$$\Delta \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Для определения числа n , обеспечивающего заданную точность 10^{-3} , нужно решить неравенство $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, т. е. $(n+1)! > 3000$. Найдем искомое n методом подбора: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040 > 3000$. Следовательно, $n+1 = 7$. Таким образом, для получения заданной точности достаточно в формуле Тейлора взять 6 членов. $\triangleleft$

Пример 3.13. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{83}$ с точностью до 10^{-6} .

▷ Пользуясь тем, что $\sqrt[4]{81} = 3$, преобразуем данное выражение:

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81 + 2} = 3 \sqrt[4]{1 + 2/81}.$$

С помощью разложения (3.7) вычислим $\sqrt[4]{1 + 2/81}$. Определим количество членов разложения, обеспечивающее заданную точность. Пользуясь формулой (5.7), глава 1 для производной n -го порядка функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = 1/4$, найдем остаточный член в форме Лагранжа для функции $\sqrt[4]{1+x}$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{4} - n \right) \frac{(1+\theta x)^{1/4-n-1} x^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= (-1)^n \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1) x^{n+1}}{4^{n+1} (n+1)! (1+\theta x)^{n+1-1/4}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $(1+\theta x)^{n+1-1/4} > 1$ для любых $x > 0$, $\theta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, получаем при $x = 2/81$ оценку погрешности

$$\Delta = |r_n(x)| < \left(\frac{2}{81} \right)^{n+1} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{162^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Вычисляем последовательно оценки погрешности при $n = 1, 2, \dots$ и сравниваем их с допустимым значением 10^{-6} : $\Delta_1 = \frac{3}{162^2 \cdot 2} = 5 \cdot 10^{-5}$; $\Delta_2 = \frac{3 \cdot 7}{162^3 \cdot 6} = 8 \cdot 10^{-7}$, т. е. $\Delta_2 < 10^{-6}$. Таким образом, установлено, что для получения требуемой точности можно ограничиться разложением до члена 2-го порядка. Имеем

$$\sqrt[4]{83} \approx 3 \left(1 + \frac{1}{162} - \frac{3}{162^2 \cdot 2} \right) \approx 3,018347. \quad \triangleleft$$

Пример 3.14. Доказать неравенство:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0).$$

▷ По формуле Тейлора (3.6) с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 1$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \quad (0 < \theta < 1).$$

По той же формуле при $n = 2$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta_1 x)^3} \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Заметим, что при $x > 0$ и при любых $\theta > 0$, $\theta_1 > 0$ выполняются неравенства:

$$\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} > 0, \quad \frac{x^3}{3(1+\theta_1 x)^3} > 0.$$

Следовательно, многочлены Тейлора 1-го порядка и 2-го порядка при любом $x > 0$ дают, соответственно, верхнюю и нижнюю оценку значения $\ln(1+x)$. Таким образом, неравенство доказано. $\triangleleft$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Разложите функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$ до члена указанного порядка n .

3.1. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $n = 5$; 3.2. $f(x) = \cos x \ln(1+x)$, $n = 4$.

Разложите функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$.

3.3. $f(x) = e^{-x}$; 3.4. $f(x) = \ln(1-x^2)$; 3.5. $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2}$.

Разложите функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 1$ до члена указанного порядка n .

3.6. $f(x) = x\sqrt{x}$, $n = 3$; 3.7. $f(x) = \sin(\pi x/2)$, $n = 4$.

Найдите пределы функций:

3.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; 3.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - e^x \sin x}{x^3}$;

3.10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

Пользуясь разложением по формуле Тейлора 2-го порядка, вычислите приближенно значение функции $f(x)$ в точке $x = a$. Оцените допущенную погрешность.

3.11. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 0,8$; 3.12. $f(x) = \arcsin x$, $a = 0,45$.

Оцените абсолютную погрешность приближенной формулы:

$$3.13. \quad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{при } |x| \leq 0,1;$$

$$3.14. \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{при } x \in (0, 1);$$

$$3.15. \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{при } |x| \leq 0,5.$$

Вычислите приближенно с заданной точностью ε :

$$3.16. \quad \sqrt[3]{25}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 3.17. \quad \ln 1,1, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3.18. \quad e^{0,2}, \quad \varepsilon = 10^{-5}; \quad 3.19. \quad \cos 5^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Докажите неравенства:

$$3.20. \quad \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$3.21. \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{при } 0 < x < +\infty.$$

Найдите производную указанного порядка с помощью формулы Тейлора:

$$3.22. \quad f = x^7 e^{-x^2}; \quad f^{(5)}(0) = ? \quad 3.23. \quad f = (1-x) \operatorname{tg} 2x; \quad f^{(4)}(0) = ?$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ**1. Монотонность функции**

1.1. Основные понятия и теоремы. Функция называется *возрастающей* [*убывающей*] на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$]. Функция называется *строго возрастающей* [*строго убывающей*] на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$]. Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными* функциями.

Теорема 1.1 (критерий монотонности). *Функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале (a, b) , возрастает [убывает] в этом интервале тогда и только тогда, когда $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$].*

Утверждение теоремы справедливо и в случае, если вместо интервала (a, b) рассматривается бесконечный промежуток $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 1.2 (достаточное условие строгой монотонности). *Если дифференцируема в интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], то $f(x)$ строго возрастает [убывает] на отрезке $[a, b]$.*

Утверждение теоремы справедливо и в случае, если вместо отрезка $[a, b]$ рассматривается бесконечный промежуток $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$.

1.2. Теоретические упражнения.

1). Пусть производная функции равна нулю в промежутке $[a, b]$. Следует ли отсюда, что эта функция постоянна на отрезке $[a, b]$?

2). Пусть производная функции положительна в промежутке $[a, b]$. Следует ли отсюда, что эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$? Какое нужно дополнительное условие, чтобы гарантировать возрастание?

3). Докажите: если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ всюду на (a, b) , кроме конечного числа точек, то $f(x)$ строго возрастает на этом интервале.

4). Найдите все значения параметров a и c , при которых функция

$$f(x) = ax^3 + cx$$

1) строго возрастает на $\mathbb{R}$;

2) строго убывает на $\mathbb{R}$.

5). Найдите все значения параметра a , при которых функция

1) $f(x) = \sin x + ax$ строго убывает на $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \cos x + ax$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x + ax$ возрастает на $\mathbb{R}$.

6). Верно ли утверждение: если дифференцируемая функция возрастает в интервале, то ее производная также возрастает в этом интервале?

1.3. Примеры решения задач.

Определить, является ли функция $f(x)$ строго монотонной на $D(f)$.

Пример 1.1. $f(x) = x^5 + 4x$.

▷ Функция $f(x) = x^5 + 4x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 5x^4 + 4 > 0$ при любом $x \in (-\infty, +\infty)$. По теореме 1.2 отсюда следует, что она строго возрастает на всей числовой прямой. ◁

Пример 1.2. $f(x) = x^3$.

▷ Функция имеет производную $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. По теореме 1.1 отсюда следует, что она возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой. На промежутке $[0, +\infty)$

функция $f(x) = x^3$ непрерывна и при $x \in (0, +\infty)$ имеет положительную производную $f'(x) = 3x^2 > 0$. По теореме 1.2 заключаем, что данная функция на промежутке $[0, +\infty)$ строго возрастает. Аналогичные рассуждения показывают, что $f(x) = x^3$ строго возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$. Покажем теперь, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Если $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ (или $x_1 \leq 0$ и $x_2 \leq 0$), то требуемое неравенство следует из строгого возрастания данной функции на промежутке $[0, +\infty)$ ($(-\infty, 0]$). Если же $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, то имеем $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$. Тем самым установлено строгое возрастание функции на всей числовой прямой. $\triangleleft$

Пример 1.3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$\triangleright$ Данная функция имеет производную $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при любом $x \neq 0$. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не удовлетворяет условиям теорем 1.1 и 1.2, так как при $x = 0$ не имеет производной. На каждом из промежутков $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ к данной функции применима теорема 1.2. Повторяя рассуждения предыдущего примера, устанавливаем строгое возрастание этой функции на всей числовой прямой. $\triangleleft$

Пример 1.4. $f(x) = 1/x$.

$\triangleright$ Данная функция имеет производную $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ при любом $x \neq 0$. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ не удовлетворяет условиям теорем 1.1 и 1.2, так как в точке $x = 0$ имеет разрыв. На каждом из промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ эта функция по теореме 1.2 строго убывает. Тем не менее, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является убывающей на всей области определения, так как, например, $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. $\triangleleft$

Пример 1.5. $f(x) = \sin x - x$.

$\triangleright$ Функция $f(x) = \sin x - x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ при любом $x \in (-\infty, +\infty)$. По теореме 1.1 отсюда следует, что функция $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$. Решая уравнение $\cos x - 1 = 0$, устанавливаем, что $f'(x) = 0$ при $x = 2\pi k$. По теореме 1.2 заключаем, что $f(x)$ строго убывает на каждом отрезке $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $f(x)$ строго убывает на всей прямой. Пусть $x_1 < x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда в силу убывания функции $f(x)$ заключаем, что $f(x_1) \equiv f(x_2)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Это противоречит строгому убыванию функции

в промежутках между точками $2\pi k$. Таким образом, функция $f(x) = \sin x - x$ строго убывает на всей числовой прямой. $\triangleleft$

Определить промежутки монотонности функции.

Задача определения промежутков монотонности функции $f(x)$ сводится к задаче нахождения тех промежутков, на которых ее производная $f'(x)$ существует и имеет постоянный знак. Если $f(x)$ в некотором интервале имеет непрерывную производную, то промежутками монотонности являются интервалы между нулями производной.

Пример 1.6. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

$\triangleright$ Функция $f(x) = 2x^2 - \ln x$ определена на множестве $x > 0$. Найдем ее производную: $f'(x) = 4x - 1/x$. Найдем нули производной: $4x - 1/x = 0$; откуда $4x^2 - 1 = 0$, и $x = 1/2$ (второй корень этого уравнения $x = -1/2$ не принадлежит области определения функции). Точка $x = 1/2$ разбивает полуось $x > 0$ на два промежутка: $(0, 1/2)$ и $(1/2, +\infty)$. В интервале $(0, 1/2)$ имеем $4x - 1/x < 0$, т. е. производная отрицательна, и, следовательно, по теореме 1.2 функция строго убывает. В промежутке $(1/2, +\infty)$ имеем противоположное неравенство $4x - 1/x > 0$, производная положительна и по теореме 1.2 функция строго возрастает. $\triangleleft$

Пример 1.7. $f(x) = x^2(1 - x)^3$.

$\triangleright$ Данная функция дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2 = \\ &= x(1-x)^2(2-5x) = -x(x-1)^2(x-2/5). \end{aligned}$$

Отметим на числовой оси точки 0, 1, $2/5$, в которых $f'(x) = 0$ и определим знаки производной в промежутках между ними. Имеем

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (0, 2/5);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty, 0) \cup (2/5, 1) \cup (1, +\infty).$$

Отсюда по теореме 1.2 заключаем, что функция строго возрастает в интервале $(0, 2/5)$ и строго убывает в промежутках $(-\infty, 0)$, $(2/5, 1]$, $[1, +\infty)$. Повторяя рассуждения примера 1.2, объединяем два последних промежутка и получаем, что данная функция строго убывает в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2/5, +\infty)$. $\triangleleft$

Пример 1.8. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[5]{x}$.

▷ Имеем $f'(x) = x^{-2/3} - x^{-4/5} = x^{-4/5} (x^{2/15} - 1)$. При $x = 0$ производная не существует. Учтем, что $x^{-4/5} = (1/\sqrt[5]{x})^4 > 0$ при $x \neq 0$, и получим интервалы знакопостоянства производной:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ при } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty); \\ f'(x) &< 0 \text{ при } x \in (-1, 0) \cup (0, 1). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 1.2 функция строго убывает в интервале $(-1, 1)$ и строго возрастает в промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. $\triangleleft$

Пример 1.9. $f(x) = \sin x + \cos x$.

▷ Преобразуем данную функцию:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \end{aligned}$$

Найдем производную:

$$f'(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Определим промежутки знакопостоянства производной:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &> 0 \text{ при } 2\pi k < \frac{\pi}{4} - x < \pi + 2\pi k \\ &\iff -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &< 0 \text{ при } \pi + 2\pi k < \frac{\pi}{4} - x < 2\pi + 2\pi k \\ &\iff \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция строго убывает в интервалах

$$(\pi/4 + 2\pi k, 5\pi/4 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

и строго возрастает в интервалах

$$(-3\pi/4 + 2\pi k, \pi/4 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad \triangleleft$$

Доказать неравенство.

Пример 1.10. $\operatorname{arctg} x < x - x^3/6, \quad 0 < x \leq 1$.

▷ Рассмотрим функцию $f(x) = \arctg x - x + x^3/6$. Найдем ее производную:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $f'(x) < 0$ в интервале $(0, 1)$. По теореме 1.2 заключаем, что $f(x)$ строго убывает на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, при любом $x \in (0, 1]$ выполняется неравенство $f(x) < f(0) = 0$, т.е. $\arctg x - x + x^3/6 < 0$, что равносильно исходному неравенству. ◁

Пример 1.11. $(1+x)^p \leq 1+x^p$ при $0 < p \leq 1$, $x \geq 0$.

▷ Рассмотрим функцию

$$f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p; \quad x \geq 0; \quad p \in (0, 1).$$

Найдем ее производную:

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} = p \left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}} \right).$$

Учитывая неравенства $1-p > 0$ и $x \geq 0$, заключаем, что $f'(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$. По теореме 1.2, глава 1, отсюда следует, что функция $f(x)$ строго возрастает в промежутке $[0, +\infty)$, и, следовательно, при любом $x > 0$ справедливо неравенство $f(x) > f(0) = 0$, т.е.

$$1 + x^p - (1+x)^p > 0.$$

При $x = 0$ данное неравенство превращается в равенство. Таким образом, справедливость неравенства установлена при всех $x \geq 0$, $p \in (0, 1)$. Непосредственная проверка показывает, что при $p = 1$ неравенство также выполняется в виде равенства. ◁

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте функции на монотонность при $x \in (-\infty, +\infty)$:

- 1.1. $f(x) = x^5 + 6x^3$; 1.2. $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x+1}$;
 1.3. $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$; 1.4. $f(x) = \cos x + x + 1$.

Определите промежутки монотонности данных функций:

$$1.5. f(x) = \ln \sqrt{1+x^2};$$

$$1.6. f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2};$$

$$1.7. f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7;$$

$$1.8. f(x) = 2 \cos x - 1.$$

Докажите неравенства:

$$1.9. \arcsin x > x, \quad 0 < x < 1;$$

$$1.10. \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \quad x > 0;$$

$$1.11. \arctg x > x - x^3/3, \quad 0 < x \leq 1;$$

$$1.12. (1+x)^p \geq 1+x^p \quad \text{при } p \geq 1, \quad x \geq 0.$$

2. Экстремумы функции

2.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Точка x_0 называется *точкой локального максимума* [локального минимума] функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность точки x_0 , в которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ [$f(x) < f(x_0)$]. При этом $f(x_0)$ называется *локальным максимумом* [локальным минимумом] функции $f(x)$. Точки локального максимума и минимума называют также *точками локального экстремума* функции. Слово «локальный» в выражениях «локальный максимум», «локальный минимум», «локальный экстремум» часто опускается.

Теорема 2.1 (необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x) = 0$ или не существует.

Частным случаем этой теоремы, дающим необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции, является теорема Ферма (1.2), глава 2.

Критической точкой функции $f(x)$ называется точка непрерывности этой функции, в которой производная равна 0 или не существует. Говорят, что *при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ меняет знак с «+» на «-»*, если существует δ -окрестность точки x_0 , такая что $f(x) > 0$ при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

и $f(x) < 0$ при любом $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Аналогично вводится понятие функции, меняющей знак с « $-$ » на « $+$ » при переходе через точку x_0 .

Теорема 2.2 (достаточное условие экстремума). Пусть x_0 — критическая точка функции $f(x)$. Тогда

- 1) если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с « $+$ » на « $-$ », то x_0 — точка максимума;
- 2) если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с « $-$ » на « $+$ », то x_0 — точка минимума;
- 3) если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 нет экстремума.

Теорема 2.3 (обобщенное достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) в точке $x_0 \in (a, b)$ существует $f^{(n)}$;
- 2) $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$;
- 3) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда

- (а) если $n = 2m$ и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума;
- (б) если $n = 2m$ и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума;
- (с) если $n = 2m + 1$, то в точке x_0 нет экстремума.

2.2. Теоретические упражнения.

- 1). Найдите все значения параметров b и c , при которых функция

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$$

- 1) имеет в точке $x = 0$ максимум;
- 2) имеет в точке $x = 0$ минимум.

- 2). Найдите все значения параметров a , b и c функция

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

имеет максимум в точке $x = m$, минимум в точке $x = n$, где $m < n$.

- 3). Может ли функция, определенная на отрезке, не иметь на этом отрезке ни максимума, ни минимума?

4). Может ли иметь только один экстремум четная функция? нечетная функция? периодическая функция?

5). Может ли функция, обладающая экстремумом, иметь обратную?

2.3. Примеры решения задач.

Найти экстремумы функции.

Пример 2.1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

▷ Функция определена и дифференцируема на всей числовой оси, поэтому критическими точками являются нули производной. Найдем их:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0.$$

Легко угадывается корень $x = 1$. Для определения остальных корней разделим многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$. Получим

$$f'(x) = 4(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ — критические точки. В промежутках между ними методом интервалов получаем

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (1, 2) \cup (3, +\infty);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3).$$

Итак, при переходе через точки $x_1 = 1$ и $x_3 = 3$ производная меняет знак с «−» на «+», а при переходе через точку $x_2 = 2$ — с «+» на «−». Следовательно, по теореме 2.2 в точках $x_1 = 1$ и $x_3 = 3$ — минимумы $f(1) = 3$ и $f(3) = 1$, а при $x_2 = 2$ — максимум $f(2) = 4$. ◁

Пример 2.2. $f(x) = (x + 1)^{10}e^{-x}$.

▷ Функция определена и дифференцируема на всей числовой оси, поэтому критическими точками являются нули производной. Найдем их. Имеем $f'(x) = -(x + 1)^9(x - 9)e^{-x}$. Критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 9$. При переходе через точку $x_1 = -1$ производная меняет знак с «−» на «+», а при переходе через точку $x_2 = 9$ — с «+» на «−». По теореме 2.2 имеем в точке

$x_1 = -1$ — минимум $f(-1) = 0$, а в точке $x_2 = 9$ — максимум $f(9) = \frac{10^{10}}{e^9}$. $\triangleleft$

Пример 2.3. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

$\triangleright$ Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Найдем производную:

$$f'(x) = 2(x^{-1/3} - x) = 2x^{-1/3}(1 - x^{4/3}).$$

Из уравнения $(1 - x^{4/3}) = 0$ находим корни производной $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Критической точкой является также точка $x_3 = 0$, в которой производная не существует. Определяем знаки производной в промежутках между критическими точками: $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. При переходе через точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ производная меняет знак с «+» на «-», а при переходе через точку $x_3 = 0$ — с «-» на «+». Следовательно, функция имеет два максимума: $f(-1) = 2$ и $f(1) = 2$ и минимум $f(0) = 0$. $\triangleleft$

Пример 2.4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

$\triangleright$ Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 0$. Найдем производную: $f'(x) = 1 - 1/x^2$. Критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Точка $x = 0$ не является критической, так как в этой точке функция имеет разрыв. Для исследования функции на экстремум в критических точках используем вторую производную. Имеем

$$f''(x) = 2x^{-3}; \quad f''(-1) = -2 < 0; \quad f''(1) = 2 > 0.$$

Итак, в обеих точках производная 2-го (четного) порядка отлична от нуля. Следовательно, по теореме 2.3 это точки экстремума. Поскольку $f''(-1) < 0$, то в точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум $f(-1) = -2$. Из $f''(1) > 0$ заключаем, что в точке $x_2 = 1$ функция имеет минимум $f(1) = 2$. $\triangleleft$

Пример 2.5. $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$.

$\triangleright$ Пользуясь периодичностью данной функции, ограничимся промежутком $[0, 2\pi)$. Найдем производную:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2 \sin x (\cos x + 1).$$

Из уравнения $2 \sin x (\cos x + 1) = 0$ находим критические точки $x = 0$, $x = \pi$. Для исследования критических точек используем производные высших порядков. Имеем

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2 \sin x \cos x + 2 \sin x)' = \\ &= (\sin 2x + 2 \sin x)' = 2 \cos 2x + 2 \cos x. \end{aligned}$$

Определим знаки второй производной в критических точках: $f''(0) = 4 > 0$, $f''(\pi) = 0$. Из теоремы 2.3 следует, что в точке $x_1 = 0$ функция имеет минимум $f(0) = -2$. Поскольку $f''(\pi) = 0$, то в точке $x_2 = \pi$ найдем следующие производные:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -4 \sin 2x - 2 \sin x; & f'''(\pi) &= 0; \\ f^{(4)}(x) &= -8 \cos 2x - 2 \cos x; & f^{(4)}(\pi) &= -6 < 0. \end{aligned}$$

Итак, порядок первой отличной от нуля производной в точке $x_2 = \pi$ равен 4, т.е. является четным числом. По теореме 2.3 заключаем, что в этой точке функция имеет максимум $f(\pi) = 2$. Окончательно получаем: данная функция в точках $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет минимум, равный -2 , а в точках $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ максимум, равный 2 . $\triangleleft$

Исследовать функцию на экстремум в точке $x = 0$.

Пример 2.6. $f(x) = 1 + \cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

$\triangleright$ Определим порядок первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$. Последовательно находим производные и вычисляем их значение в этой точке. Имеем $f'(x) = -\sin x + x - x^2$; $f'(0) = 0$. Далее $f''(x) = -\cos x + 1 - 2x$; $f''(0) = 0$. Наконец, $f'''(x) = \sin x - 2$; $f'''(0) = -2 \neq 0$. Итак, порядок первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$ равен 3, т.е. является нечетным числом. По теореме 2.3 заключаем, что в этой точке функция не имеет экстремума. $\triangleleft$

Пример 2.7. $f(x) = e^{-x} + \sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

$\triangleright$ Для определения порядка первой отличной от нуля производной можно вместо непосредственного дифференцирования использовать разложение по формуле Тейлора. Напишем разложения 3-го порядка для функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = \sin x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x^4); \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_2(x^4).$$

Отсюда получаем разложение для $f(x)$:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x^4) + x - \frac{x^3}{3!} + o_2(x^4) - \\ - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Поскольку коэффициент при x^n в формуле Тейлора равен $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, то из полученного разложения следует, что порядок первой отличной от нуля производной равен 4, т.е. является четным числом. Коэффициент при x^4 в этом разложении равен $\frac{1}{4!}$ и, следовательно, $f^{(4)}(0) = 1 > 0$. По теореме 2.3 заключаем, что в точке $x = 0$ функция имеет минимум $f(0) = 1$. $\triangleleft$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите экстремумы функций :

2.1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; 2.2. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$;

2.3. $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$; 2.4. $f(x) = xe^{-x}$;

2.5. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.

Исследуйте функции на экстремум в точке $x = 0$:

2.6. $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$; 2.7. $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$;

2.8. $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$.

3. Выпуклость и точки перегиба

3.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Тогда уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. График функции $f(x)$ называется

выпуклым вверх [вниз] в точке x_0 , если существует такая окрестность этой точки, в которой выполняется неравенство

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad [f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]. \quad (3.1)$$

Это неравенство означает, что график функции расположен ниже [выше] касательной к нему в точке x_0 . Если при $x \neq x_0$ неравенство (3.1) является строгим, то говорят о *строгой выпуклости* графика.

График функции $f(x)$ называется *выпуклым вверх [вниз] в интервале (a, b)* , если он является выпуклым вверх [вниз] в каждой точке этого интервала.

- Теорема 3.1 (критерий выпуклости).** 1. *График функции $f(x)$ является выпуклым вверх [вниз] в интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает [возрастает] в этом интервале.*
2. *График функции $f(x)$ является строго выпуклым вверх [вниз] в интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x)$ строго убывает [строго возрастает] в этом интервале.*

Теорема 3.2 (достаточное условие выпуклости). *Если для любого $x \in (a, b)$ $f''(x) \leq 0$ [$f''(x) \geq 0$], то график функции $f(x)$ является выпуклым вверх [вниз] в интервале (a, b) .*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 , дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и имеет касательную в точке x_0 . Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$, если существует δ -окрестность точки x_0 такая, что в интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ направления выпуклости различны.

Теорема 3.3 (необходимое условие перегиба). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$ или не существует.*

Теорема 3.4 (достаточное условие перегиба). *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

- 1) *функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) ;*
 - 2) *$f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0 \in (a, b)$,*
- то x_0 — точка перегиба.*

Теорема 3.5 (обобщенное достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) существует $f^{(n)}(x_0)$;
- 2) $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 2, 3, \dots, n - 1$;
- 3) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда

- (а) если $n = 2m + 1$, то x_0 — точка перегиба;
- (б) если $n = 2m$, то точка x_0 не является точкой перегиба.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Найдите все значения параметра a , при которых график функции

$$f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

будет выпуклым вниз (вверх) на всей числовой прямой.

2). Найдите все значения параметров a и b , при которых график функции

- 1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ будет выпуклым вверх на $\mathbb{R}$;
- 2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ будет выпуклым вниз на $\mathbb{R}$.

3). Найдите все значения параметра a , при которых график функции

- 1) $f(x) = \sin x + ax^2$ будет выпуклым вниз на $\mathbb{R}$;
- 2) $f(x) = \cos x + ax^2$ будет выпуклым вверх на $\mathbb{R}$.

4). Выясните, при каких значениях параметров a и b точка $A(1, 3)$ является точкой перегиба графика функции $f(x) = ax^3 + bx^2$.

5). Докажите или опровергните:

- 1) график каждого многочлена нечетной степени имеет хотя бы одну точку перегиба;
- 2) график каждого многочлена четной степени с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба.

3.3. Примеры решения задач.

Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика функции.

Пример 3.1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

▷ Найдем $f''(x)$. Имеем

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x(x - 2/3).$$

Решая уравнение $f''(x) = 0$, получаем возможные точки перегиба: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Для исследования поведения функции в этих точках определим знаки $f''(x)$ в промежутках между ними. Пользуясь методом интервалов, получаем

$$f''(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right),$$

$$f''(x) < 0 \text{ при } x \in \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

Отсюда, пользуясь теоремой 3.2, заключаем, что график функции $f(x)$ имеет выпуклость вниз при $x \in (-\infty, 0)$ и при $x \in (2/3, +\infty)$, а при $x \in (0, 2/3)$ — выпуклость вверх. Из теоремы 3.4 следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2/3$ — точки перегиба графика функции. $\triangleleft$

Пример 3.2. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-4}$.

▷ Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-4)^{-2/3}; \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(x-4)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-4)^5}}.$$

При $x = 4$ функция не имеет ни первой, ни, тем более, второй производной. В этой точке функция имеет бесконечные односторонние производные 1-го порядка. Следовательно, график функции $y = 2 + \sqrt[3]{x-4}$ имеет в точке $(4, 2)$ вертикальную касательную. Далее, $f''(x) > 0$ при $x < 4$ и $f''(x) < 0$ при $x > 4$. Итак, график функции $f(x)$ является выпуклым вниз при $x < 4$ и выпуклым вверх при $x > 4$. При этом, функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки $x = 4$ и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Следовательно, точка $x = 4$ является точкой перегиба. $\triangleleft$

Пример 3.3. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

▷ Данная функция определена при $x \neq 0$. Имеем

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(1+x^3)}{x^3}.$$

Решая уравнение $f''(x) = 0$, получаем $x = -1$. Определяем интервалы знакопостоянства для $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \text{ при } x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty), \\ f''(x) &< 0 \text{ при } x \in (-1, 0). \end{aligned}$$

Итак, график функции $f(x)$ является выпуклым вверх при $x \in (-1, 0)$ и выпуклым вниз в промежутках $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$; точка $x = -1$ является точкой перегиба. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба, так как в этой точке функция имеет разрыв. $\triangleleft$

Исследовать расположение графика функции относительно касательной к нему в точке $(0, f(0))$.

Пример 3.4. $f(x) = e^{-x} + \cos x$.

$\triangleright$ Вычислим значения функции и ее первых двух производных в точке $x = 0$:

$$f(0) = e^0 + \cos 0 = 2; \quad f'(x) = -e^{-x} - \sin x; \quad f'(0) = -1.$$

Отсюда получаем уравнение касательной к графику функции в точке $(0, f(0))$: $y = 2 - x$. Далее имеем

$$f''(x) = e^{-x} - \cos x; \quad f''(0) = 0.$$

Итак, в точке $x = 0$ возможен перегиб. Для дальнейшего исследования найдем $f'''(0)$:

$$f'''(x) = -e^{-x} + \sin x; \quad f'''(0) = -1.$$

По теореме 3.5 отсюда следует, что $x = 0$, действительно, является точкой перегиба. Определим направление выпуклости в полукрестностях этой точки. В левой полукрестности $f''(x) > 0$, так как $|\cos x| \leq 1$, а $e^{-x} > 1$ при $x < 0$. Отсюда по теореме 3.2 следует, что при $x < 0$ график функции является выпуклым вниз, т.е. расположен выше касательной. Поскольку в точке $x = 0$ направление выпуклости меняется, то при $x > 0$ график функции является выпуклым вверх, т.е. расположен ниже касательной. $\triangleleft$

Пример 3.5. $f(x) = \sin x + \frac{x^3}{6}$.

$\triangleright$ Для исследования направления выпуклости можно вместо непосредственного дифференцирования использовать разложение по формуле Тейлора. Пользуясь разложением функции $y = \sin x$ до члена пятого порядка, получаем

$$f(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^4) + \frac{x^3}{6} = x + \frac{x^5}{5!} + o(x^4).$$

Линейный член разложения дает уравнение касательной $y = x$. В полученном разложении коэффициенты при x^k для $k = 2, 3, 4$ равны нулю. Отсюда следует, что

$$f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0,$$

так как коэффициент при x^n в формуле Тейлора равен $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Коэффициент при x^5 в разложении $f(x)$ равен $\frac{1}{5!}$ и, следовательно, $f^{(5)}(0) = 1 \neq 0$. По теореме 3.5 заключаем, что $x = 0$ является точкой перегиба. Разность $f(x) - x$ в δ -окрестности точки $x = 0$ имеет тот же знак, что и $x^5/5!$. Следовательно, при $x < 0$ график функции расположен ниже ($x^5 < 0$), а при $x > 0$ — выше ($x^5 > 0$) касательной прямой $y = x$. $\triangleleft$

Пример 3.6. $f(x) = e^{-x} - \left(\frac{x}{2} + 1\right) \sin x$.

$\triangleright$ Напишем разложение данной функции по формуле Тейлора, пользуясь разложениями функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = \sin x$ четвертого порядка. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \\ &\quad - \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) = \\ &= 1 - 2x + \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Линейные члены разложения дают уравнение касательной $y = 1 - 2x$. В полученном разложении коэффициенты при x^k для $k = 2, 3$ равны нулю. Отсюда следует, что $f''(0) = f'''(0) = 0$. Коэффициент при x^4 в разложении $f(x)$ равен $1/8$ и, следовательно, $f^{(4)}(0) \neq 0$. По теореме 3.5 заключаем, что $x = 0$ не является точкой перегиба. Разность $f(x) - (1 - 2x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет тот же знак, что и $x^4/8$. Следовательно, график функции в окрестности точки $x = 0$ расположен выше касательной прямой $y = 1 - 2x$. $\triangleleft$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графиков функций:

$$3.1. f(x) = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4;$$

$$3.2. f(x) = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}; \quad 3.3. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}.$$

Исследуйте расположение графика функции относительно касательной к нему в точке $(0, f(0))$. Сделайте эскиз графика функции вместе с касательной в окрестности точки $x = 0$.

$$3.4. f(x) = e^x - \frac{x^2}{2};$$

$$3.5. f(x) = \sin x - x;$$

$$3.6. f(x) = \cos x + x + \frac{x^2}{2};$$

$$3.7. f(x) = xe^{-x} + x^2;$$

$$3.8. f(x) = -\cos x + x - \frac{x^2}{2} + x^3;$$

$$3.9. f(x) = e^{-x^2/2} - \cos x.$$

4. Наибольшее и наименьшее значения функции

4.1. Основные понятия и теоремы. Значение $f(x_0)$ называют наибольшим [наименьшим] значением функции f на множестве $A \subset D(f)$, если существует $x_0 \in A$ такой, что для всех $x \in A$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]. Число $f(x_0)$ в этом случае обозначают $\max_{x \in A} f(x)$, или $\max_{x \in A} f$ [$\min_{x \in A} f(x)$, или $\min_{x \in A} f$].

Теорема 4.1 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке и принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.

Теорема 4.2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
- 2) $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$].

Тогда

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b); \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a),$$

$$\left[\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(a); \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(b) \right],$$

Теорема 4.3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
- 2) $f(x)$ дифференцируема на (a, b) ;
- 3) существует лишь конечное число точек $x_k \in (a, b)$ ($1 \leq k \leq n$) таких, что $f'(x_k) = 0$.

Тогда

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{0 \leq k \leq n+1} \{f(x_k)\}; \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{0 \leq k \leq n+1} \{f(x_k)\},$$

где $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$.

Теорема 4.4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ непрерывна в промежутке X с концами a и b , где a , b — действительные числа или символы $-\infty$, $+\infty$;
- 2) $f(x)$ дифференцируема в (a, b) ;
- 3) существует единственная точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$.

Тогда

(а) если x_0 — точка локального минимума, то

$$\min_{x \in X} f(x) = f(x_0);$$

(б) если x_0 — точка локального максимума, то

$$\max_{x \in X} f(x) = f(x_0).$$

Теорема 4.5. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ непрерывна в промежутке X с концами a и b , где a , b — действительные числа или символы $-\infty$, $+\infty$;
 - 2) $f(x)$ дифференцируема в (a, b) ;
 - 3) существует не более, чем конечное число точек $x_k \in (a, b)$ ($1 \leq k \leq n$) таких, что $f'(x_k) = 0$.
 - 4) $M = \max_{0 \leq k \leq n+1} \{M_k\}$, где $M_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- $$M_0 = \lim_{x \rightarrow a+} f(x); \quad M_{n+1} = \lim_{x \rightarrow b-} f(x).$$

Тогда

(а) если $M = M_k$, $1 \leq k \leq n$, то $\max_{x \in X} f(x) = f(x_k)$;

(б) если $M = M_0 < +\infty$, $a > -\infty$, $a \in X$, то $\max_{x \in X} f(x) = f(a)$;

(с) если $M = M_{n+1} < +\infty$, $b < +\infty$, $b \in X$, то $\max_{x \in X} f(x) = f(b)$.

(д) в остальных случаях $\max_{x \in X} f(x)$ не существует.

Справедлива аналогичная теорема для наименьшего значения функции.

4.2. Теоретические упражнения.

- 1). Может ли функция, определенная на отрезке, не иметь на этом отрезке ни наибольшего, ни наименьшего значений?
- 2). Установите, верно ли какое-либо из следующих утверждений:
 - 1) если функция достигает на отрезке $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений, то она имеет производную в интервале (a, b) .
 - 2) если функция достигает на отрезке $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений, то она непрерывна на отрезке $[a, b]$.
- 3). Выясните, при каких значениях параметра функция $y = \frac{1}{x - a}$ имеет на отрезке $[0, 1]$:
 - 1) только наибольшее значение;
 - 2) только наименьшее значение;
 - 3) наибольшее и наименьшее значения.

4.3. Примеры решения задач.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на указанном отрезке.

Пример 4.1. $f(x) = x^2 - 1$; $x \in [1, 3]$.

▷ Функция непрерывна на отрезке $[1, 3]$ и по теореме 4.1 принимает на нем наибольшее и наименьшее значение. Исследуем ее монотонность. Имеем $f'(x) = 2x > 0$ при любом $x \in (1, 3)$. Следовательно, по теореме 4.2 данная функция принимает наибольшее значение на правом конце отрезка, а наименьшее — на левом: $\max_{x \in [1, 3]} f(x) = f(3) = 8$; $\min_{x \in [1, 3]} f(x) = f(1) = 0$. ◁

Пример 4.2. $f(x) = x^3 - 3x$; $x \in [0, 3]$.

▷ Функция непрерывна на отрезке $[0, 3]$ и по теореме 4.1 принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Решая уравнение $3x^2 - 3 = 0$, находим критические точки: $x = -1$, $x = 1$. Точка $x = -1$ исключается из рассмотрения, так как не принадлежит отрезку $[0, 3]$. Следуя процедуре, описанной в теореме 4.3, присоединяем к критиче-

ской точке $x_1 = 1$ концы отрезка $[0, 3]$ и получаем 3 точки для исследования: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Вычисляем значения функции в этих точках: $f(0) = 0$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$. Сравнивая эти значения, получаем по теореме 4.3: $\max_{x \in [0, 3]} f(x) = f(3) = 18$;

$$\min_{x \in [0, 3]} f(x) = f(1) = -2. \quad \triangleleft$$

Пример 4.3. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$; $x \in [-1, 3]$.

▷ Функция непрерывна на отрезке $[-1, 3]$ и, следовательно, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Найдем критические точки внутри данного отрезка. Ими являются корни уравнения $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$; $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$, за исключением точки $x = -2$, не принадлежащей отрезку $[-1, 3]$. Добавляя концы отрезка, получаем четыре точки для исследования: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Вычисляем значения функции в этих точках: $f(-1) = -16$, $f(0) = -9$; $f(2) = -25$; $f(3) = 0$. Сравниваем эти значения и получаем, что

$$\max_{x \in [-1, 3]} f(x) = f(3) = 0; \quad \min_{x \in [-1, 3]} f(x) = f(2) = -25. \quad \triangleleft$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в данном промежутке, если они существуют.

Пример 4.4. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; $x \in (0, 3]$.

▷ Промежуток $(0, 3]$ не является отрезком и, следовательно, теорему 4.1 применить нельзя. Найдем критические точки:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3} = 0.$$

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x = 2$, причем $f'(x) > 0$ при $x \in (0, 2)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (2, 3)$. Таким образом, $x = 2$ является точкой локального максимума функции. По теореме 4.4 заключаем, что в этой точке функция принимает наибольшее значение $\max_{x \in (0, 3]} f(x) = f(2) = \frac{1}{4}$. Исследуем поведение функции при $x \rightarrow 0$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty.$$

Итак, функция не ограничена снизу, и, следовательно, наименьшее значение в промежутке $(0, 3]$ не существует. $\triangleleft$

Пример 4.5. $f(x) = x^2 e^{-x}$; $x \in (-1, +\infty)$.

▷ Функция непрерывна на данном промежутке. Найдем производную:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Выполнены первые три условия теоремы 4.5. Вычислим значения функции в критических точках: $M_1 = f(0) = 0$; $M_2 = f(2) = (2/e)^2$. Исследуем поведение функции на концах промежутка:

$$M_0 = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 e^{-x} = e; \quad M_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

Сравниваем полученные значения и получаем

$$\max_{0 \leq k \leq 3} M_k = M_0 = e; \quad \min_{0 \leq k \leq 3} M_k = M_1 = M_3 = 0.$$

Применив теорему 4.5, имеем

$$\min_{x \in (-1, +\infty)} f(x) = f(0) = 0.$$

Учитывая, что точка $x = -1$ не принадлежит данному промежутку, заключаем на основании пункта (d) теоремы 4.5, что $\max_{x \in (-1, +\infty)} f(x)$ не существует. ◁

Пример 4.6. $f(x) = x + \sqrt{x}$; $x \in (0, 4)$.

▷ Найдем производную: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Функция в промежутке $[0, +\infty)$ непрерывна и $f'(x) > 0$ при любом $x \in (0, +\infty)$, поэтому она удовлетворяет первым трем условиям теоремы 4.5 с $n = 0$. Поскольку точки $x = 0$ и $x = 4$ не принадлежат данному промежутку, то, согласно пункту (d) теоремы 4.5, ни наибольшего, ни наименьшего значения функции на этом промежутке не существует. ◁

Пример 4.7. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$; $x \in (-\infty, +\infty)$.

▷ Функция непрерывна на всей числовой оси, так как дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе дроби отрицателен. Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5 - 2(x+1)^2}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 2x + 5)^2}.$$

Критические точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Вычислим значения функции в критических точках и пределы при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+5} = 0; \\ M_1 &= f(-3) = -\frac{1}{4}; \quad M_2 = f(1) = \frac{1}{4}; \\ M_3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+5} = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая эти числа, находим

$$\max_{0 \leq k \leq 3} M_k = M_2 = \frac{1}{4}; \quad \min_{0 \leq k \leq 3} M_k = M_1 = -\frac{1}{4}.$$

Применяя теорему 4.5, получаем

$$\max_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}; \quad \min_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x) = f(-3) = -\frac{1}{4}. \quad \triangleleft$$

Пример 4.8. $f(x) = 2 \cos x - \sin^2 x$; $x \in (-\infty, +\infty)$.

▷ Функция имеет период 2π , поэтому можно ограничиться определением ее наибольшего и наименьшего значения на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдем производную:

$$f'(x) = -2 \sin x - 2 \sin x \cos x = -2 \sin x (1 + \cos x).$$

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$. Вычисляем значения функции в критических точках:

$$f(0) = f(2\pi) = 2; \quad f(\pi) = -2.$$

Сравниваем эти числа и на основании теоремы 4.3 заключаем, что

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = f(0) = f(2\pi) = 2; \quad \min_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = f(\pi) = -2.$$

Учитывая периодичность функции, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \max_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x) &= f(2\pi n) = 2; \\ \min_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x) &= f(\pi + 2\pi n) = -2. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке:

4.1. $f(x) = x^2 \ln x$; $x \in [1, e]$;

4.2. $f(x) = 1 - x^2$; $x \in [-1, 2]$;

4.3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; $x \in [-2, 5/2]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в данном промежутке, если они существуют:

4.4. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \in (0, 2]$;

4.5. $f(x) = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$; $x \in [0, \pi/2]$;

4.6. $f(x) = x - \sqrt{x}$; $x \in (0, 4)$;

4.7. $f(x) = xe^{-x}$; $x \in (-\infty, +\infty)$;

4.8. $f(x) = x \ln x$; $x \in (0, +\infty)$;

4.9. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x+13}$; $x \in (-\infty, +\infty)$;

4.10. $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x$; $x \in (-\infty, +\infty)$.

5. Построение графиков функций

5.1. Схема исследования функции.

I. Определение общего вида графика функции.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва.
5. Исследовать поведение функции в окрестности каждой точки разрыва: найти односторонние пределы и установить тип разрыва.
6. Найти и изобразить на чертеже вертикальные асимптоты (если они существуют).
7. Исследовать поведение функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$:

- (а) найти и изобразить на чертеже наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ (если она существует);

(b) если асимптоты нет, то установить, является ли функция ограниченной при $x \rightarrow +\infty$ или неограниченной;

(c) если функция является неограниченной, то установить, является ли она бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$ и какого знака.

(d) аналогично исследовать функцию при $x \rightarrow -\infty$.

8. Найти нули функции, т.е. решить уравнение $f(x) = 0$; определить промежутки знакопостоянства функции.

II. Уточнение вида графика с использованием первой производной.

1. Найти $f'(x)$. Решить уравнение $f'(x) = 0$; определить промежутки монотонности и критические точки функции.

2. Исследовать критические точки функции: выявить точки максимума, минимума; вычислить значение функции в точках экстремума.

III. Уточнение вида графика с использованием второй производной.

1. Найти $f''(x)$. Решить уравнение $f''(x) = 0$; определить промежутки сохранения направления выпуклости и точки перегиба.

2. В точках перегиба вычислить значение функции и первой производной, построить касательные.

3. Построить эскиз графика функции.

5.2. Примеры решения задач.

Исследовать функцию и построить график.

Пример 5.1. $f = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$.

▷ I. Определение общего вида графика функции.

1. Область определения функции $D(f) = \mathbb{R} \setminus 2$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как область определения не является симметричным множеством.

3. Функция не является периодической, так как область определения не является периодическим множеством.

4. Функция имеет одну точку разрыва $x = 2$.

5. Поведение функции в окрестности каждой точки разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} = -\infty.$$

Следовательно, $x = 2$ — точка разрыва 2-го рода.

6. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции.
 7. Поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)} = 1 + 0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)} = 1 - 0.$$

Таким образом, прямая $y = 1$ является правой и левой горизонтальной асимптотой графика функции. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 0$, то график функции при $x \rightarrow +\infty$ приближается к асимптоте $y = 1$ сверху. Аналогично, поскольку $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - 0$, то график функции при $x \rightarrow -\infty$ приближается к асимптоте $y = 1$ снизу.

8. Уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} = 0$$

имеет единственный корень $x = 1$. Данная функция имеет те же промежутки знакопостоянства, что и функция

$$y = \frac{x-1}{x-2}.$$

Пользуясь методом интервалов, заключаем, что

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty); \quad f(x) < 0 \text{ при } x \in (1; 2).$$

II. Уточнение вида графика с использованием первой производной.

1. Находим критические точки и промежутки монотонности.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-1)^{1/3} (x-2)^{-1/3} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (x-1)^{-2/3} (x-2)^{-1/3} - \frac{1}{3} (x-1)^{1/3} (x-2)^{-4/3} = \\ &= \frac{1}{3} (x-1)^{-2/3} (x-2)^{-4/3} ((x-2) - (x-1)) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 (x-2)^4}}. \end{aligned}$$

Знаки производной:

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \neq 1, 2.$$

Учитывая, что $x = 2$ — точка разрыва, заключаем, функция убывает на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$, но не является убывающей на всей области определения. Точка $x = 1$ является критической. Поскольку $f'(1+0) = f'(1-0) = -\infty$, то в точке $x = 1$ график имеет вертикальную касательную $x = 1$.

2. В критической точке $x = 1$ у функции нет экстремума, так как при переходе через эту точку производная не меняет знак.

III. Уточнение вида графика с использованием второй производной.

1. Находим $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}(x-2)^{-4/3} \right)' = \\ &= \frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}(x-2)^{-4/3} + \frac{4}{9}(x-1)^{-2/3}(x-2)^{-7/3} = \\ &= \frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}(x-2)^{-7/3}((x-2) + 2(x-1)) = \\ &= -\frac{2(x-4/3)}{\sqrt[3]{3(x-1)^5(x-2)^7}}. \end{aligned}$$

Уравнение $f''(x) = 0$ имеет один корень $x = 4/3$. Определяем знаки $f''(x)$ методом интервалов:

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \text{ при } x \in (1; 4/3) \cup (2; +\infty); \\ f''(x) &< 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1) \cup (4/3; 2). \end{aligned}$$

Следовательно, график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз на промежутках $(1; 4/3)$, $(2; +\infty)$ и выпуклым вверх на промежутках $(-\infty; 1)$, $(4/3; 2)$. График имеет 2 точки перегиба: $x = 1$ и $x = 4/3$.

2. Составим уравнения касательных в точках перегиба. Рассмотрим точку $x = 1$. Находим $f(1) = 0$. Поскольку $f'(1+0) = f'(1-0) = -\infty$, то в точке $M(1, 0)$ график имеет вертикальную касательную. Рассмотрим теперь точку $x = 4/3$. Вычисляем:

$$f(4/3) = -0,79; \quad f'(4/3) = -1,19.$$

Уравнение касательной в точке перегиба $M(4/3; -0,79)$:

$$y = -1,19(x - 4/3) - 0,79 \implies y = -1,19x + 0,8.$$

3. Эскиз графика функции изображен на рисунке.

◁

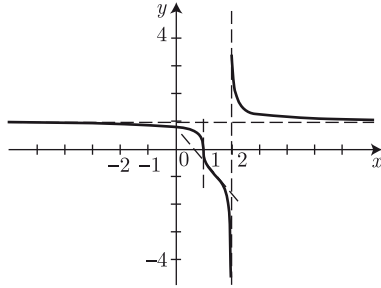


Рисунок к примеру 5.1

Пример 5.2. $f = \arcsin \frac{4x}{4+x^2}$.

▷ I. Определение общего вида графика функции.

1. Поскольку $D(\arctg x) = [-1, 1]$, то для нахождения области определения данной функции рассматриваем двойное неравенство

$$-1 \leq \frac{4x}{1+x^2} \leq 1.$$

Покажем, что это неравенство выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$. Умножим все части неравенства на $4+x^2$. Получим

$$-(4+x^2) \leq 4x \leq 4+x^2 \iff -(x+2)^2 \leq 0 \leq (x-2)^2.$$

Последнее двойное неравенство справедливо при всех действительных x . Поэтому $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Исследуем функцию на четность и нечетность. Область определения — симметричное множество. Вычислим $f(-x)$, учитывая нечетность функции $y = \arcsin x$:

$$f(-x) = \arcsin \frac{-4x}{4+(-x)^2} = \arcsin \left(-\frac{4x}{4+x^2} \right) = -f(x).$$

Следовательно, данная функция является нечетной.

3. Функция не является периодической, так как имеет единственный нуль (см. далее).
4. Функция непрерывна на $\mathbb{R}$ по теореме о непрерывности элементарной функции на области ее определения.
5. Точек разрыва нет.
6. Вертикальных асимптот нет.
7. Поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.

8. Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$. Вычисляем коэффициенты прямой $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{-4x}{4 + (-x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{-4x}{4 + (-x)^2}}{x}.$$

Найдем предел числителя дроби:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{-4x}{4 + (-x)^2} = \\ & = \arcsin \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{4 + (-x)^2} = \arcsin 0 = +0. \end{aligned}$$

Следовательно, $k_1 = 0$ как предел произведения двух бесконечно малых при $x \rightarrow +\infty$ функций: $f(x)$ и $1/x$. Вычисляем b_1 :

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{-4x}{4 + (-x)^2} - 0 \cdot x = +0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является правой горизонтальной асимптотой графика функции. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +0$, то график функции при $x \rightarrow +\infty$ приближается к асимптоте $y = 0$ сверху.

9. Аналогично проводится исследование поведения функции при $x \rightarrow -\infty$. Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow -\infty$. Вычисляем коэффициенты прямой $y = k_2x + b_2$. Устанавливаем, что $k_2 = 0$, $b_2 = -0$. Таким образом, прямая $y = 0$ является также и левой горизонтальной асимптотой графика функции. Поскольку $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0$, то график функции при $x \rightarrow +\infty$ приближается к асимптоте $y = 0$ снизу.
10. Находим нули функции. Решаем уравнение $f(x) = 0$, учитывая, что функция $y = \arcsin x$ обращается в нуль в единственной точке $x = 0$:

$$\arcsin \frac{-4x}{4 + (-x)^2} = 0 \iff \frac{-4x}{4 + (-x)^2} = 0 \iff x = 0.$$

Промежутки знакопостоянства:

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0); \quad f(x) < 0 \text{ при } x \in (0; +\infty).$$

II. Уточнение вида графика с использованием первой производной.

1. Находим $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4x}{4+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} = \\ &= \frac{4(4-x^2)}{\sqrt{(4-x^2)^2(4+x^2)^2}} = \frac{4(4-x^2)}{|4-x^2|(4+x^2)}. \end{aligned}$$

Производная не существует при $|x| = 2$. При $|x| \neq 2$ раскрываем модуль:

$$f' = \begin{cases} \frac{4}{4+x^2} & \text{при } |x| < 2; \\ -\frac{4}{4+x^2} & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Уравнение $f'(x) = 0$ не имеет корней. Промежутки знакопостоянства производной:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty); \\ f'(x) &> 0 \text{ при } x \in (-2; 2). \end{aligned}$$

Промежутки монотонности: функция убывает на промежутках $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ и возрастает в интервале $(-2; 2)$. Критическими точками функции являются точки $x = -2$ и $x = 2$, в которых производная не существует.

2. Исследуем поведение функции в критических точках. Рассмотрим точку $x = -2$. При переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, $x = -2$ — точка минимума. Находим значение функции в точке минимума:

$$f_{\min} = f(-2) = \arcsin \frac{4 \cdot (-2)}{4 + (-2)^2} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим односторонние производные в точке минимума:

$$\begin{aligned} f'(-2-0) &= \lim_{x \rightarrow -2-0} -\frac{4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}; \\ f'(-2+0) &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке $x = -2$ график не имеет касательной, у него излом. Рассмотрим точку $x = 2$. При переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на ми-

нус. Следовательно, $x = 2$ — точка максимума. Вычисляем значение функции в этой точке:

$$f_{\max} = f(2) = \arcsin \frac{4 \cdot 2}{4 + 2^2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Вычисляем односторонние производные в точке максимума:

$$\begin{aligned} f'(2-0) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}; \\ f'(2+0) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} -\frac{4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке максимума график также имеет излом.

III. Уточнение вида графика с использованием второй производной.

1. Находим $f''(x)$:

$$f'' = \begin{cases} -\frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{при } |x| < 2; \\ \frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Уравнение $f''(x) = 0$ имеет один корень $x = 0$. Знаки $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2); \\ f''(x) &> 0 \text{ при } x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty). \end{aligned}$$

Следовательно, график функции имеет выпуклость вниз на промежутках $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$ и выпуклость вверх на промежутках $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$. График меняет направление выпуклости в точках $-2, 0, 2$. Точки $x = -2$ и $x = 2$ не являются точками перегиба, так как в этих точках график не имеет касательных; $x = 0$ — точка перегиба.

2. Найдем уравнение касательной в точке перегиба:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1 \implies y = x.$$

3. Эскиз графика функции изображен на рисунке.

◁

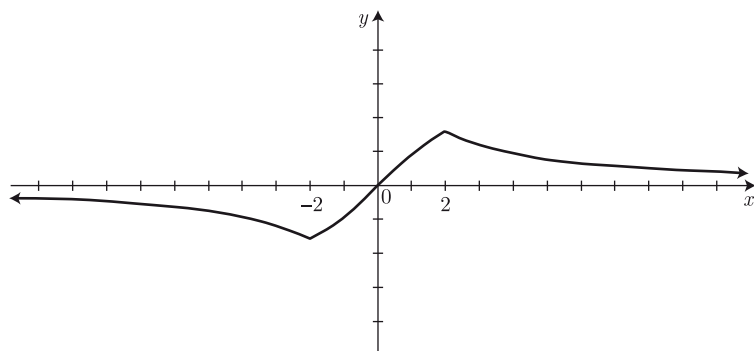


Рисунок к примеру 5.2

5.3. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте функции и постройте графики:

5.1. $f = \sqrt{1+x^2} + 2x;$

5.2. $f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

5.3. $f = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$

5.4. $f = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2};$

5.5. $f = \frac{e^x(x-1)^{2/3}}{x}.$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Производная и дифференциал

1.1. 3. **1.2.** -2 . **1.3.** 0.

1.4. 2. о Используйте формулу $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и первый замечательный предел.

1.5. 1. о Сделайте замену переменной $t = \arcsin \Delta x$ и используйте первый замечательный предел.

1.6. 0. **1.7.** $3x^2 - 2$; $\mathbb{R}$. **1.8.** $\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$; $\mathbb{R}$. **1.9.** $\frac{15}{(3x - 1)^2}$; $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

1.10. $-\sin x$; $\mathbb{R}$. о Воспользуйтесь тождеством

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

1.11. $a^x \ln a$; $\mathbb{R}$. о Воспользуйтесь тождеством $a^x = e^{x \ln a}$.

1.12. $\frac{1}{x \ln a}$; $x > 0$. о Воспользуйтесь тождеством $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

2.1. $-\frac{\ln 5}{x^2} + \frac{1}{5} x^{-4/5}$. **2.2.** $56x^7 - \frac{6}{x^3} + \frac{5}{2} x^{3/2}$. **2.3.** $(x^2 - 5x + 1)e^x$.

2.4. $\frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}$. **2.5.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}}$. **2.6.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$.

2.7. $3 \ln 2 (x^2 + 1) 2^{x^3 + 3x}$. **2.8.** $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \cdot e^{\sqrt{1 - \cos 2x}}$. **2.9.** $2 \cos 4x$.

2.10. $\frac{2x}{\ln 3(x^2 + 4) \ln(x^2 + 4) \ln \log_7(x^2 + 4)}$. **2.14.** $\frac{4 \operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x} - \operatorname{tg} x$.

2.15. $\sqrt{9 - x^2}$. **2.16.** $4(4 + x^2)^{-3/2}$. **2.17.** $-\sin 2x \cos(\cos 2x)$.

2.18. $\frac{5}{4\sqrt[4]{(2x + 1)^3(3x + 4)^5}}$. **2.19.** $\frac{6(x - 1)}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$.

3.1. $f'(-0) = -2$, $f'(0) = 2$. **3.2.** $f'(-5 - 0) = +\infty$; $f'(-5 + 0) = +\infty$.

3.3. $f'(-0) = -\infty$; $f'(0) = +\infty$. **3.4.** $f'(-0)$ не существует; $f'(0) = 1$.

3.5. $f'(-1 - 0) = f'(-1 + 0) = 0$.

3.6. $f'(1 - 0)$ не существует; $f'(1 + 0) = +\infty$. о При вычислении предела сделайте замену переменной $t = \arccos \frac{1}{1 + \Delta x}$.

3.7. $f'(-2)$ не существует: $f'(-2 - 0) = -\infty$, $f'(-2 + 0) = +\infty$. **3.8.** существует, $f'(1) = 0$.

3.9. $f'(3)$ не существует: $f'(3 - 0) = -2$, $f'(3 + 0) = 2$. о «Раскройте» модуль и используйте метод примера **3.3**.

4.1. $y = -x/2 + 5/2$. **4.2.** $y = 2x$. **4.3.** $\pi/4$. **4.4.** $3\pi/4$. **4.5.** $(1/2, 5/4)$.

4.6. $(-2, 18)$, $(2, -18)$. **4.7.** $(1, 2e)$, $(-3, -6e^{-3})$. **4.8.** $(0, 0)$, $\operatorname{arctg}(2/3)$.

4.9. $(1, 1)$, $\operatorname{arctg} 3$.

4.10. Касательная не существует, функция не дифференцируема.

4.11. Касательная $x = 0$, функция не дифференцируема.

- 4.12.** Касательная $y = x + 1$, $f'(0) = 1$. ○ Используйте метод примера 3.3.
4.13. Касательная $x = 1$, функция не дифференцируема. ○ Покажите, что функция имеет при $x = 1$ бесконечные односторонние производные и используйте определение касательной для этого случая. **4.14.** $x = 5$. **4.15.** $x = -1$.
5.1. $x^2(60 \ln x + 47)$. **5.2.** $16e^{2x}(x^2 + 4x + 3)$.
5.3. ○ Используйте метод математической индукции.
5.4. ○ Используйте метод математической индукции.
5.5. ○ Используйте метод примера 3.5.
5.6. ○ Используйте тождество $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ и формулу (5.8).
5.7. ○ Используйте тождество $\frac{1+x}{1-x} = -1 - \frac{2}{x-1}$ и формулу (5.7).
6.1. $f' = -\operatorname{ctg} t$, $f'' = -\frac{1}{a \sin^3 t}$. **6.2.** $f' = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$, $f'' = \frac{2}{e^t (\cos t - \sin t)^3}$.
7.1. 0. **7.2.** $8 dx$. **7.3.** $f \approx 1$, $\delta = 4$; $f \approx 0$, $\delta = 0,031$; $f \approx 0,01$, $\delta = 0,000301$.
7.4. 1,043. **7.5.** $\cos(150^\circ + \alpha) \approx -\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360}\alpha$.

2. Свойства дифференцируемых функций

- 1.1.** а). Верно; б). Неверно. **1.3.** ○ Используйте метод примера 1.4.
1.4. Один корень $x = 0$. ○ Используйте метод примера 1.4.
1.5. а). Неверно; б). Верно. **1.6.** (0, 1). ○ Примените теорему Ролля.
1.7. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. ○ Примените теорему Лагранжа.
1.8. ○ Используйте теорему Лагранжа и метод примера 1.5.
1.9. ○ Примените теорему Лагранжа и метод примера 1.6 к функции $f(x) = e^x - ex$ на отрезке $[1, x]$.
1.10. ○ Используйте метод примера 1.7.
1.11. ○ Используйте метод примера 1.7.
2.1. 1. **2.2.** 2. **2.3.** $1/6$. **2.4.** 2. **2.5.** 0. **2.6.** 0. **2.7.** $3/4$. **2.8.** 1.
2.9. ∞ . ○ Примените правило Лопиталя 2 раза.
2.10. 1. ○ Используйте тождество $e^{\sin x} - e^x = e^x \cdot (e^{\sin x - x} - 1)$ и примените правило Лопиталя к дроби $\frac{e^{\sin x - x} - 1}{\sin x - x}$. **2.11.** $15/4$. **2.12.** 0. **2.13.** $x = 0$. **2.14.** Нет асимптот. **2.15.** $x = 0$; $y = x$. **3.1.** $x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5)$. **3.2.** $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
3.3. $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$.
3.4. $-x^2 - \frac{x^4}{2} - \dots - \frac{x^{2n}}{n} + r_n(x)$.
3.5. $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + r_{2n+1}(x)$.
3.6. $1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$. ○ Сделайте замену $y = x - 1$ и примените (3.7) с $\alpha = 3/2$.
3.7. $1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o((x-1)^5)$. ○ Сделайте замену $y = x - 1$

и примените (3.5) к $\cos \frac{\pi}{2} x$.

3.8. $1/3$. **3.9.** $-1/3$. **3.10.** $1/3$. **3.11.** $0, 67474$. **3.12.** $0, 46676$.

3.13. $< 7 \cdot 10^{-6}$. **3.14.** $< 0, 0625$. **3.15.** $< 0, 00003$.

3.16. $2,924$. о Воспользуйтесь равенством $\sqrt[3]{25} = 3\sqrt[3]{1 - \frac{2}{27}}$.

3.17. $0, 095$. **3.18.** $1, 22140$. **3.19.** $0, 99619$.

3.20. о Определите знак $r_3(x)$.

3.21. о Определите знаки $r_2(x)$ и $r_3(x)$.

3.22. $f^{(5)}(0) = 0$.

3.23. $f^{(4)}(0) = -64$.

3. Исследование функций

1.1. Строго возрастает на $\mathbb{R}$. **1.2.** Строго убывает на $\mathbb{R}$.

1.3. Не является монотонной на $\mathbb{R}$. Убывает на промежутках $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, +\infty)$.

1.4. Строго возрастает на $\mathbb{R}$.

1.5. Убывает на $(-\infty, 0)$, возрастает на $(0, +\infty)$.

1.6. Убывает на $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, возрастает на $(-1, 1)$.

1.7. Возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(4, +\infty)$, убывает на $(-1, 4)$.

1.8. Убывает на $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$, возрастает на $(-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$.

1.9. о Докажите монотонность функции $f(x) = \arcsin x - x$ при $0 < x < 1$ и примените метод примера 3.13. **1.10.** о Докажите монотонность функции $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ при $x > 0$ и примените метод примера 3.13.

1.11. о Докажите монотонность функции $f(x) = \arctg x - x + x^3/3$ при $0 < x \leq 1$ и примените метод примера 3.13.

1.12. о Примените метод примера 3.14.

2.1. $f_{\max} = f(1) = 0$; $f_{\min} = f(3) = -4$.

2.2. $f_{\max} = f(\pi k) = (-1)^k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$; $f_{\min} = f(\pm 2\pi/3 + 2\pi k) = -3/4$.

2.3. $f_{\min} = f(3/4) = -3\sqrt[3]{2}/8$. **2.4.** $f_{\max} = f(1) = e^{-1}$.

2.5. $f_{\min} = f(1) = 0$; $f_{\max} = f(e^2) = 4/e^2$.

2.6. $f_{\min} = f(0) = 0$. **2.7.** Экстр. нет. **2.8.** $f_{\max} = f(0) = 0$.

3.1. Выпуклость вниз при $x \in (-3, 2)$, вверх при $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$, точки перегиба $x = -3, x = 2$.

3.2. Выпуклость вниз в промежутках $(-\infty, 3)$ и $(3, +\infty)$, точек перегиба нет, в точке $x = 3$ вертикальная касательная.

3.3. Выпуклость вниз при $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, вверх при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, точка перегиба $x = \pm 1$.

3.4. График над касательной $y = x + 1$ при $x > 0$, под касательной при $x < 0$, $x = 0$ — точка перегиба.

3.5. График над касательной $y = 0$ при $x < 0$, под касательной при $x > 0$, $x = 0$ — точка перегиба. о Используйте разложение по формуле Тейлора: $f(x) = -x^3/6 + o(x^4)$.

3.6. График над касательной $y = x + 1$, в точке $x = 0$ выпуклость вниз. о Используйте разложение по формуле Тейлора:

$f(x) = 1 + x + x^4/24 + o(x^5)$.

3.7. График над касательной $y = x$ при $x > 0$, под касательной при $x < 0$, $x = 0$ — точка перегиба. о Используйте разложение по формуле Тейлора: $f(x) = x + x^3/2 + o(x^3)$.

3.8. График над касательной $y = x - 1$ при $x > 0$, под касательной при $x < 0$,

$x = 0$ — точка перегиба. ◦ Используйте разложение по формуле Тейлора: $f(x) = -1 + x + x^3 + o(x^3)$.

3.9. График над касательной $y = 0$. ◦ Используйте разложение по формуле Тейлора: $f(x) = x^4/12 + o(x^3)$.

4.1. $\max f = f(e) = e^2$; $\min f = f(1) = 0$.

4.2. $\max f = f(0) = 1$; $\min f = f(2) = -3$.

4.3. $\max f = f(-1) = 8$; $\min f = f(2) = -19$.

4.4. $\max f$ не существует; $\min f = f(2) = 1/2$.

4.5. $\max f = f(\pi/4) = 1$; $\min f$ не существует.

4.6. $\max f$ не существует; $\min f = f(1/4) = -1/2$.

4.7. $\max f = f(1) = 1/e$; $\min f$ не существует.

4.8. $\max f$ не существует; $\min f = f(1/e) = -1/e$.

4.9. $\max f = f(-3) = 1/4$; $\min f = f(5) = -1/12$.

4.10. $\max f = f(-\pi/2 + 2\pi k) = 2$; $\min f = f(\pi/2 + 2\pi k) = -2$.

5.1. Непрерывна на $\mathbb{R}$, возрастает, выпуклость вниз; правая асимптота $y = 3x$, левая асимптота $y = x$.

5.2. Непрерывна в интервале $(-1, 1)$, четная, асимптоты $x = -1$, $x = 1$; $y_{\min} = y(0) = 1$, выпуклость вниз.

5.3. Непрерывна на $\mathbb{R}$, нечетная, возрастает, выпуклость вниз на промежутке $(0; +\infty)$, выпуклость вверх на промежутке $(-\infty; 0)$, $x = 0$ — точка перегиба.

5.4. Непрерывна на $\mathbb{R}$, четная, возрастает, асимптота $y = -\frac{\pi}{2}$, выпуклость вниз на промежутках $(0; +\infty)$, $(-\infty; 0)$, $y_{\max} = y(0) = \frac{\pi}{2}$, в точке $(0; \frac{\pi}{2})$ нет касательной.

5.5. Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus 0$, асимптота $x = 0$, левая асимптота $y = 0$, $y_{\min} = y(1) = 0$, в точке $(1, 0)$ вертикальная касательная; $x_1 = 0,76$, $x_2 = 1,37$ — точки перегиба.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Найдите производную функции:

$$\text{I. } y = \sin(2x^2 + 1); \quad y = \arcsin \sqrt{x}; \quad y = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^5;$$

$$y = e^{1/x}; \quad y = \cos \sqrt[2]{x}; \quad y = \arccos e^x;$$

$$y = \ln^5 x; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}.$$

$$\text{II. } y = e^{-x^2}; \quad y = \sin x^4 + \cos x^4; \quad y = (1 + \sin x)^5;$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}; \quad y = \arcsin^2 x; \quad y = \ln(x + \sqrt{x+1});$$

$$y = \operatorname{ctg}(\sqrt{x} + 1); \quad y = \cos \frac{\pi}{3}x; \quad y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3.$$

$$\text{III. } y = \sqrt{\sin x}; \quad y = \ln \cos x; \quad y = \sin x^3;$$

$$y = e^{\operatorname{tg} x}; \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$y = \operatorname{arctg}^2 x; \quad y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2x}}; \quad y = \cos^2 \pi x.$$

$$\text{IV. } y = \sqrt{1 + 3x}; \quad y = \sin(2x + 1); \quad y = \arcsin \frac{x}{2};$$

$$y = \log_3(1 + x^2); \quad y = \cos \frac{x}{3}; \quad y = \operatorname{ctg}(8 + x^3);$$

$$y = \arccos x^2; \quad y = 2\sqrt{x}; \quad y = \operatorname{arctg}^3 x.$$

$$\text{V. } y = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}; \quad y = 2^{x^2}; \quad y = \arccos \sqrt{x+1};$$

$$y = \operatorname{ctg}(8 + \sqrt[3]{x}); \quad y = x \cos 3x; \quad y = \ln(1 + x^5);$$

$$y = \arcsin \frac{2}{x}; \quad y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}x; \quad y = \sin \left(\frac{x}{2} + x^2\right).$$

$$\text{VI. } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}; \quad y = 5^{(1+x)^2}; \quad y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$y = \operatorname{tg} x^2); \quad y = x \arcsin \sqrt[4]{x}; \quad y = \frac{(1+x)^{100}}{e^x};$$

$$y = \ln(1 + \sqrt{x}); \quad y = \operatorname{arctg}(2^x); \quad y = \cos \left(2x + \frac{\pi}{24}\right).$$

$$\text{VII. } y = \sqrt{1 - x^2}; \quad y = \sin^3 x; \quad y = \arccos e^x;$$

$y = \operatorname{tg}(x^2 + 3);$	$y = x^2 \sin 3x;$	$y = \ln \operatorname{tg} x;$
$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}};$	$y = \frac{e^{2x}}{x};$	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 - 2x}.$
VIII. $y = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$	$y = e^{-x^2};$	$y = \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right);$
$y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x^2 + 3};$	$y = \ln(x^3 + 5x);$	$y = \cos 8x^3;$
$y = \arccos^2 x;$	$y = \frac{\sqrt{x}}{\log_2 x};$	$y = x^2 \operatorname{arctg} 3x.$
IX. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \frac{1}{x}};$	$y = 0,5^{x^2};$	$y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x^2 + 1};$
$y = \operatorname{tg}(x^2 + 2x);$	$y = \lg \sin x;$	$y = \cos \sqrt{x};$
$y = \arccos \frac{1}{x};$	$y = \frac{x^5 + 1}{(x + 1)^5};$	$y = x^3 \arcsin 2x.$
X. $y = \sqrt{x^5 + 6x + 3};$	$y = 2^{\sqrt{x}};$	$y = \arcsin \sqrt{x^2 + 1};$
$y = \operatorname{tg} \frac{x}{8};$	$y = \log_3 \cos x;$	$y = \cos(3x + 4);$
$y = \operatorname{arctg}(\ln x);$	$y = \frac{x^2}{e^x};$	$y = (x + 1)^3 \sin 2x.$

2. Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x)$ в точке: а) $(x_0, f(x_0))$; б) $(x(t_0), y(t_0))$.

I. а) $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}; x_0 = 0;$	б) $\begin{cases} x = \sin^3 t; \\ y = \cos^3 t; t_0 = \pi/3. \end{cases}$
II. а) $f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} - 32;$ $x_0 = 4;$	б) $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t; \\ y = \sin t; t_0 = \pi/3. \end{cases}$
III. а) $f(x) = x + \sqrt{x^3}; x_0 = 1;$	б) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t; t_0 = \pi/3. \end{cases}$
IV. а) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}; x_0 = 4;$	б) $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3; t_0 = 1. \end{cases}$
V. а) $f(x) = 2x + 1/x; x_0 = 1;$	б) $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t; t_0 = \pi/6. \end{cases}$

- VI. a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; x_0 = -2;$ b) $\begin{cases} x = 3t \cos t; \\ y = 3t \sin t; t_0 = \pi/2. \end{cases}$
- VII. a) $f(x) = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}; x_0 = 1;$ b) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t); \\ y = t \cos t; t_0 = 0. \end{cases}$
- VIII. a) $f(x) = \frac{1}{3x + 2}; x_0 = 2;$ b) $\begin{cases} x = t - t^4; \\ y = t^2 - t^3; t_0 = 1. \end{cases}$
- IX. a) $f(x) = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}; x_0 = 1;$ b) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = 5^t; t_0 = 0. \end{cases}$
- X. a) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}; x_0 = 2;$ b) $\begin{cases} x = 2e^t; \\ y = e^{-t}; t_0 = 0. \end{cases}$

3. Вычислите приближенно, заменяя приращение функции дифференциалом:

- I. $y = \sqrt{x}; \quad x = 16,08.$
- II. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}; \quad x = 1,012.$
- III. $y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2; \quad x = 0,98.$
- IV. $y = \arcsin x; \quad x = 0,08.$
- V. $y = x^{11}; \quad x = 1,021.$
- VI. $y = \sqrt{4x - 1}; \quad x = 2,56.$
- VII. $y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}; \quad x = 1,016.$
- VIII. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}; \quad x = 0,01.$
- IX. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}; \quad x = 0,01.$
- X. $y = 1/\sqrt{2x + 1}; \quad x = 1,58.$

4. Найдите $y^{(n)}(x)$, если:

- I. $y = e^{3x};$ II. $y = \sin 2x + \cos(x + 1);$
- III. $y = \lg(5x + 2);$ IV. $y = \sqrt{x};$
- V. $y = 4/x;$ VI. $y = 7^{5x};$
- VII. $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x;$ VIII. $y = \frac{x}{x + 1};$
- IX. $y = \sqrt{e^{3x+1}};$ X. $y = \frac{1 + x}{1 - x}.$

5. Найдите предел функции:

I. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4};$	b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$
II. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$
III. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$
IV. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{x^4}.$
V. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(x-1)};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{x(\sin x - x)}.$
VI. a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x;$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}.$
VII. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}}{e^{x^3} - 1}.$
VIII. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+1/x^2)}{\pi - 2 \operatorname{arctg} x};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 - x \ln 2}{(1-x)^3 - 1 + 3x}.$
IX. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^5 - 1 + x^2}.$
X. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3};$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$

6. Исследуйте функции и постройте графики:

I. $y = 12x - x^3;$	$y = \frac{2}{e^x(x+3)};$	$y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}.$
II. $y = x^{2/3}(1-x);$	$y = x^3 e^x;$	$y = \frac{x^2 + 1}{x}.$
III. $y = \frac{x^2 + 1}{x};$	$y = \frac{e^x}{4(1-x)};$	$y = x - \ln x.$
IV. $y = (1-x)e^x;$	$y = \frac{x}{\ln x};$	$y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$
V. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$	$y = \frac{e^x}{x};$	$y = x + \operatorname{arctg} x.$
VI. $y = x(x-1)^{2/3};$	$y = x e^{-x^2/2};$	$y = x - \operatorname{arctg} 2x.$

$$\text{VII. } y = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}; \quad y = x^2 e^{-x}; \quad y = x \ln^2 x.$$

$$\text{VIII. } y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}; \quad y = \frac{x}{x^2-4}; \quad y = x^2 \ln^2 x.$$

$$\text{IX. } y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}; \quad y = x^3 e^{-x}; \quad y = x \ln x.$$

$$\text{X. } y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}; \quad y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}; \quad y = x e^{-x/2}.$$

$$\text{XI. } y = \frac{x^2}{x^2-1}; \quad y = x^2 e^{1/x}; \quad y = \frac{1+\ln x}{x}.$$

$$\text{XII. } y = x + 2\sqrt{-x}; \quad y = x^2 e^{-x^2}; \quad y = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

Часть III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная и неопределенный интеграл

1.1. Основные понятия и теоремы. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке X , если $F(x)$ имеет производную на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$ при любом $x \in X$. Для концов промежутка под производной понимается односторонняя производная.

Теорема 1.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ в промежутке X , то при $x \in X$

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad \text{где } C = \text{const.}$$

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ в промежутке X называется множество всех первообразных функции $f(x)$ в данном промежутке. Неопределенный интеграл обозначается символом

$$\int f(x) dx,$$

где $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение.

Операция отыскания первообразной для данной функции называется интегрированием этой функции. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$ в промежутке X , то

$$\int f(x) dx = \{ F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

Эту формулу принято более кратко записывать так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Постоянная C может принимать любые действительные значения. Поэтому она называется произвольной постоянной или постоянной интегрирования.

Таблица основных неопределенных интегралов

I.	$\int 0 dx = C$
II.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
III.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
IV.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
V.	$\int e^x dx = e^x + C$
VI.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
VII.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
VIII.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
IX.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
X.	$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$
XI.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$
XII.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln x + \sqrt{x^2 + \alpha} + C \quad (\alpha \neq 0)$

Каждая формула таблицы справедлива на любом промежутке, содержащемся в области определения подынтегральной функции. Отметим, что формула (III) объединяет две формулы, одна из которых применяется при положительных значениях x , а вторая — при отрицательных. В формуле (XII) также объединены две формулы.

Первообразная существует не у всякой функции. Достаточные условия существования первообразной даны в теореме 1.2 главы 2.

Основные свойства неопределенных интегралов

$$\left(\int_x f(x) dx \right)' = f(x) \quad (1.1)$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (1.2)$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0) \quad (1.3)$$

Свойства (1.2) и (1.3) называются линейными свойствами неопределенного интеграла.

Метод разложения.

Метод разложения заключается в представлении подынтегральной функции в виде линейной комбинации таких функций, интегралы от которых содержатся в таблице, и применении свойств линейности:

$$\int \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int f_i(x) dx.$$

1.2. Теоретические упражнения.

1). Верно ли утверждение: всякая функция имеет первообразную? Рассмотрите пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -2, & x \leq 0. \end{cases}$$

2). Известно, что две первообразных функции $f(x)$ в точке $x = 5$ отличаются на 10. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x = 11$?

3). Докажите: функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = a, \\ -2, & x < a, \end{cases}$$

при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на любом промежутке, не содержащем точку $x = a$, и не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку $x = a$.

4). Докажите формулу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + C.$$

5). Докажите, что любая первообразная нечетной функции есть функция четная.

6). Докажите, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная.

1.3. Примеры решения задач.

Применяя таблицу основных неопределенных интегралов, найти интеграл.

Пример 1.1. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$.

▷ Запишем подынтегральную функцию в виде степени с дробным показателем и применим (II) с $\alpha = 2/3$:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5} x^{5/3} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.2. $\int \frac{dx}{x^2}$.

▷ Запишем подынтегральную функцию в виде степени с отрицательным показателем и применим (II) с $\alpha = -2$:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.3. $\int \frac{dx}{2x}$.

▷ Вынесем множитель $\frac{1}{2}$ за знак интеграла (по свойству (1.3)) и применим (III) (при $\alpha = -1$ формула (II) не применима):

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.4. $\int \frac{dx}{3^x}$.

▷ Воспользуемся тождеством $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и применим (IV) с $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\ln \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

▷ Данный интеграл преобразуется к (XII) вынесением коэффициента при x^2 из-под знака корня:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + x^2}}.$$

Вынесем $\frac{1}{\sqrt{2}}$ из под знака интеграла, применим (XII) с $\alpha = \frac{1}{2}$ и получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x + \sqrt{\frac{1}{2} + x^2} \right) + C. \quad \triangleleft$$

Найти неопределенный интеграл, пользуясь методом разложения.

Пример 1.6. $\int \left(\sin x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{2x} \right) dx$.

▷ Пользуясь свойством линейности интеграла и применяя формулы (VI), (XI) и (III), получим

$$\begin{aligned} \int \left(\sin x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{2x} \right) dx &= \\ &= \int \sin x dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x} = \\ &= -\cos x - 3 \arcsin x + \frac{7}{2} \ln |x| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.7. $\int \frac{5-x}{\sqrt{x}} dx$.

▷ Делим почленно числитель на знаменатель:

$$\int \frac{5-x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (5x^{-1/2} - x^{1/2}) dx.$$

Пользуясь свойством линейности интеграла и применяя формулу (II) с $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\int (5x^{-1/2} - x^{1/2}) dx = \int 5x^{-1/2} dx - \int x^{1/2} dx = 5 \frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} + C.$$

После упрощений окончательно имеем

$$\int \frac{5-x}{\sqrt{x}} dx = 10\sqrt{x} - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.8. $\int \frac{x^2+4}{x^2+1} dx$.

▷ Выделим целую часть дроби и воспользуемся линейностью:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2+1} \right) dx = \int dx + 3 \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Применяя формулы (II) и (X), окончательно получаем

$$\int \frac{x^2+4}{x^2+1} dx = x + 3 \operatorname{arctg} x + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.9. $\int (x^2+1)^3 dx$.

▷ Раскроем скобки и воспользуемся линейностью:

$$\begin{aligned} \int (x^2+1)^3 dx &= \int (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) dx = \\ &= \int x^6 dx + 3 \int x^4 dx + 3 \int x^2 dx + \int dx = \\ &= \frac{1}{7} x^7 + \frac{3}{5} x^5 + x^3 + x + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 1.10. $\int (3^x - 4^x)^2 dx$.

▷ Раскроем скобки, воспользуемся свойствами степени и линейностью интеграла:

$$\begin{aligned} \int (3^x - 4^x)^2 dx &= \int ((3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 4^x + (4^x)^2) dx = \\ &= \int ((3^2)^x - 2 \cdot (3 \cdot 4)^x + (4^2)^x) dx = \\ &= \int 9^x dx - 2 \int 12^x dx + \int 16^x dx. \end{aligned}$$

Применяя формулу (IV) с $a = 9$; $a = 12$ и $a = 16$, завершаем интегрирование:

$$\int 9^x dx - 2 \int 12^x dx + \int 16^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{16^x}{\ln 16} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 1.11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию, подставив в числителе «тригонометрическую единицу» ($1 = \sin^2 x + \cos^2 x$) и разделив затем числитель на знаменатель почленно. Получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов и применим формулы (VIII) и (IX):

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Произведем тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + C = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + C = \\ &= -\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} + C = -2 \operatorname{ctg} 2x + C. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C. \quad \triangleleft$$

Для осуществления метода разложения мы пользовались следующими видами тождественных преобразований:

- (1) формулы сокращенного умножения;
- (2) почленное деление;
- (3) выделение целой части рациональной дроби;
- (4) тригонометрические формулы.

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите неопределенные интегралы:

$$1.1. \int (x - 2e^x) dx;$$

$$1.2. \int (3^x + 5^{-2x}) dx;$$

$$1.3. \int \left(\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3} \right) dx;$$

$$1.4. \int (\sin x + \sqrt{x}) dx;$$

$$1.5. \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \cos x \right) dx;$$

$$1.6. \int \frac{dx}{5x^2 + 5};$$

$$1.7. \int \frac{dx}{\sqrt{7 + 9x^2}};$$

$$1.8. \int (x + 1)(3x - 4) dx;$$

$$1.9. \int \left(\sqrt[3]{x^4} + \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx;$$

$$1.10. \int \frac{t^3 + t^2}{\sqrt{3t}} dt;$$

$$1.11. \int \frac{1 - \sqrt{4 + 4x^2}}{4 + 4x^2} dx;$$

$$1.12. \int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx;$$

$$1.13. \int \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1} + \sqrt[5]{x^2} \right) dx;$$

$$1.14. \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}(x + 1)}{\sqrt[3]{x} + 1} + \frac{5^x}{3^x} \right) dx;$$

$$1.15. \int \frac{\sqrt{1 + x^2} + 2\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx;$$

$$1.16. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

2. Интегрирование заменой переменной

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1. Пусть функция $t = t(x)$ отображает промежуток X в промежуток T и имеет на X непрерывную про-

изводную. Пусть функция $f(t)$ непрерывна в промежутке T . Тогда

$$\int f(t(x))t'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=t(x)}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования заменой переменной состоит в использовании формулы (2.1) как слева направо, так и справа налево. Если удастся представить подынтегральную функцию в виде произведения

$$f(t(x))t'(x) \quad (2.2)$$

и первообразная функции $f(t)$ известна, то задача решена. В самом деле, мы находим $\int f(t) dt$, а затем выполняем подстановку $t = t(x)$ и получаем множество первообразных исходной функции. Выбор функций $f(t)$ и $t(x)$ в этом случае основывается на сходстве интегрируемой функции с подынтегральной функцией какого-либо из табличных интегралов. Формулу (2.1) при этом применяют *слева направо* и говорят о простейшей замене переменной. В более сложных случаях, когда сходство заданного интеграла с каким-либо табличным интегралом непосредственно не усматривается, но подынтегральная функция существенно упрощается путем введения новой независимой переменной, формулу (2.1) используют *справа налево*.

Формула, выражающая новую переменную интегрирования t через старую x , или старую переменную интегрирования x через новую t называется *подстановкой*.

2.2. Теоретические упражнения.

1). Найдите неопределенные интегралы при любом значении параметра $c \in \mathbb{R}$:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{1+cx^2}};$$

$$2) \int \frac{dx}{1+cx^2};$$

$$3) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+cx^2}};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{c+x^2}};$$

$$5) \int \frac{x dx}{(c+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$6) \int \frac{x dx}{(1+cx^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2). Докажите дифференцированием формулы XIII–XVI (дополнительная таблица интегралов, с. 282).

3). Укажите вид неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

в зависимости от значения дискриминанта D квадратного трехчлена. Рассмотрите случаи: 1) $D > 0$; 2) $D < 0$; 3) $D = 0$.

4). Укажите вид неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

в зависимости от значений коэффициентов a , b и c квадратного трехчлена.

5). Докажите, что при всех $a, b \in \mathbb{R}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) справедлива формула:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} \right) \right|,$$

$$\text{где } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.3. Примеры решения задач. Рассмотрим некоторые приемы нахождения интегралов с помощью замены переменной.

Простейшая замена переменной.

Пример 2.1. $\int (x+1)^9 dx$.

▷ Преобразуем интеграл к виду (2.2) с $f(t) = t^9$ и произведем замену переменной $t = x + 1$. Получим

$$\int (x+1)^9 dx = \int (x+1)^9 (x+1)' dx = \int t^9 dt = \frac{t^{10}}{10} + C.$$

Возвращаемся к исходной переменной x , подставляя $t = x + 1$:

$$\frac{t^{10}}{10} + C = \frac{(x+1)^{10}}{10} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int (x+1)^9 dx = \frac{(x+1)^{10}}{10} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 2.2. $\int \sin 5x dx$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию к виду (2.2) с $f(t) = \sin t$ и произведем замену переменной $t = 5x$. Имеем

$$\int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x (5x)' dx = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C.$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C. \quad \triangleleft$$

Пример 2.3. $\int e^{-2x+3} dx$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию к виду (2.2) с $f(t) = e^t$ и произведем замену переменной $t = -2x + 3$. Получим

$$\begin{aligned} \int e^{-2x+3} dx &= -\frac{1}{2} \int e^{-2x+3} (-2x+3)' dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-2x+3} + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.4. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$.

▷ Замечая, что $(x^2+1)' = 2x$, преобразуем подынтегральную функцию к виду (2.2) и произведем замену переменной $t = x^2 + 1$. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)' dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

▷ Заметив, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, произведем замену переменной $t = \arcsin x$. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \arcsin x (\arcsin x)' dx = \\ &= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.6. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

▷ Замена переменной $t = \ln x$:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C. \quad \triangleleft$$

В примерах 2.1–2.3 мы пользовались линейной заменой переменной, а в примерах 2.4–2.6 — нелинейной заменой.

Сведение к простейшей замене переменной с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример 2.7. $\int \frac{dx}{x^2+4}.$

▷ Подынтегральная функция напоминает (X). Преобразуем квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби так, чтобы свободный член стал равным 1: $x^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right)$. Замена переменной $t = \frac{x}{2}$ приводит интеграл к виду (X). Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Мы сейчас рассмотрели частный случай интеграла (XIII) из дополнительной таблицы интегралов (с. 282).

Пример 2.8. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

▷ В табличных формулах в знаменателях дробей содержатся многочлены 2-й степени с двумя членами (формулы (X)–(XII)). Поэтому если встречается полный квадратный трехчлен, то его сначала преобразовывают, выделяя полный квадрат. Имеем в нашем случае $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$. Тогда замена переменной $t = x + 2$ приводит интеграл к виду (X):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{0,25 - x^2}}.$

▷ Подынтегральная функция напоминает (XI). (Выбирая подходящий табличный интеграл с корнем из квадратного трехчлена в знаменателе, обращаем внимание на знак при x^2 , которым отличаются (XI) и (XII)). Преобразуем знаменатель подынтегральной функции, «исправляя» свободный член:

$$\sqrt{0,25 - x^2} = 0,5 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{0,5}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - (2x)^2}}{2}.$$

Тогда замена переменной $t = 2x$ приводит интеграл к виду (XI).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{0,25 - x^2}} &= \int \frac{2 dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin 2x + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Мы рассмотрели частный случай интеграла (XIV) из дополнительной таблицы интегралов (с. 282).

Пример 2.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}.$

▷ Преобразуем знаменатель подынтегральной функции: $x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2 - 8$. Тогда замена переменной $t = x + 3$ приводит интеграл к виду (XII). Получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 3)^2 - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 - 8}} = \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 - 8}| + C = \ln |x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 1}| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.11. $\int \frac{dx}{(x + 5)(x - 4)}.$

▷ Преобразуем подынтегральную функцию, используя равенство

$$\frac{1}{(x + 5)(x - 4)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x + 5} \right)$$

(проверяется приведением правой части к общему знаменателю).
Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 5)(x - 4)} &= \frac{1}{9} \left(\int \frac{dx}{x - 4} - \int \frac{dx}{x + 5} \right) = \\ &= \frac{1}{9} (\ln |x - 4| - \ln |x + 5|) = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x - 4}{x + 5} \right| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.12. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}.$

▷ Сходство с (X) обманчиво (здесь нужно обращать внимание на знак свободного члена). Разложим знаменатель на множители и воспользуемся приемом, описанным при решении предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 9} &= \int \frac{dx}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{6} \left(\int \frac{dx}{x - 3} - \int \frac{dx}{x + 3} \right) = \\ &= \frac{1}{6} (\ln |x - 3| - \ln |x + 3|) = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Этим методом получается формула (XV) из дополнительной таблицы интегралов (с. 282).

Пример 2.13. $\int \frac{(2x+3) dx}{(x^2+3x+2)}.$

▷ Заметим, что производная знаменателя подынтегральной функции равна числителю. Поэтому делаем замену переменной $t = x^2 + 3x + 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+3) dx}{x^2+3x+2} &= \int \frac{(x^2+3x+2)' dx}{x^2+3x+2} = \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x^2+3x+2| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.14. $\int \frac{(2x+1) dx}{(x^2+3x+2)}.$

▷ Представим числитель дроби в виде алгебраической суммы производной знаменателя и константы:

$$(2x+1) = 2x+3-2 = (x^2+3x+2)' - 2.$$

Тогда исходный интеграл разложится в линейную комбинацию двух интегралов:

$$\int \frac{(2x+1) dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{(x^2+3x+2)' dx}{x^2+3x+2} - 2 \int \frac{dx}{x^2+3x+2}.$$

К каждому из этих интегралов применим подходящую замену переменной. Первый из них берется с помощью замены $t = x^2 + 3x + 2$, что и было сделано в предыдущей задаче:

$$\int \frac{(x^2+3x+2)' dx}{x^2+3x+2} = \ln |x^2+3x+2| + C.$$

Для того, чтобы найти второй интеграл, преобразуем знаменатель дроби, выделяя полный квадрат квадратного трехчлена:

$$x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \int \frac{(x+1,5)' dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dt}{t^2 - (0,5)^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 0,5} \ln \left| \frac{t-0,5}{t+0,5} \right| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Этот прием называется выделением производной в числителе дроби. Он используется при интегрировании дроби с линейной

функцией в числителе и квадратным трехчленом или корнем из него в знаменателе.

Пример 2.15. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2x+3}}.$

▷ Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{x}$. Получим

$$\frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2x+3}} = \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3x}}.$$

Применим метод выделения производной. Найдем производную квадратного трехчлена:

$$(2x^2 + 3x)' = 4x + 3$$

и выразим числитель дроби через эту производную:

$$x = \frac{1}{4} (4x + 3 - 3) = \frac{1}{4} (4x + 3) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (2x^2 + 3x)' - \frac{3}{4}.$$

По методу разложения

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{4} \int \frac{(2x^2 + 3x)' dx}{\sqrt{2x^2 + 3x}} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x}}.$$

Найдем каждый из полученных интегралов. К первому применим замену переменной $t = 2x^2 + 3x$. Получим

$$\int \frac{(2x^2 + 3x)' dx}{\sqrt{2x^2 + 3x}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{2x^2 + 3x} + C.$$

Перейдем ко второму интегралу. Преобразуем знаменатель:

$$2x^2 + 3x = 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} = 2 \left(\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right).$$

Применим замену переменной $t = x + \frac{3}{4}$. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{9}{16}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{9}{16}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x} \right| + C. \end{aligned}$$

Суммируя полученные первообразные, получаем в результате

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2x^2 + 3x}} = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 3x} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x} \right| + C.$$

◁

Пример 2.16. $\int \sin^3 x dx$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию, пользуясь основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x.$$

Теперь производим замену переменной $t = \cos x$, $t' = -\sin x$.
Имеем

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\int (1 - t^2) dt = \int t^2 dt - \int dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \end{aligned}$$

◁

Пример 2.17. $\int \sin^4 x dx$.

▷ Воспользуемся методом понижения степени, основанным на формулах половинного угла:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

Получим

$$\sin^4 x = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x.$$

Еще раз понизим степень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x) = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Теперь интегрируем методом разложения:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \frac{(2x)'}{2} dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \frac{(4x)'}{4} dx = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

◁

Пример 2.18. $\int \sin 3x \cos x dx$.

▷ Преобразуем произведение $\sin 3x \cos x$ в сумму по формуле

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)).$$

Получим

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x).$$

Используем метод разложения:

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 4x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 4x \frac{(4x)'}{4} dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x \frac{(2x)'}{2} dx = \\ &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Некоторые стандартные подстановки.

Во многих случаях с помощью замены переменной удастся существенно упростить подынтегральную функцию. Один из таких приемов — использование тригонометрических подстановок для интегрирования функций, содержащих квадратные корни из многочленов второй степени. Подстановки подбираются таким образом, чтобы извлечь квадратный корень и избавиться от иррациональности в подынтегральной функции. Рассмотрим следующие примеры:

Пример 2.19. $\int \sqrt{4 - t^2}$.

▷ Применим тригонометрическую подстановку

$$t = 2 \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

позволяющую ввиду тождества $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ избавиться от корня. В самом деле,

$$\sqrt{4 - t^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 x} = 2\sqrt{\cos^2 x} = 2|\cos x|.$$

Учитывая, что $\cos x \geq 0$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, получим

$$\sqrt{4 - t^2} = 2 \cos x.$$

Применяя формулу замены переменной (2.1) *справа налево*, имеем:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-t^2} dt &= \int 2 \cos x (2 \sin x)' dx = 4 \int \cos^2 x dx = \\ &= 2 \int (1 + \cos 2x) dx = 2 \int dx + \int \cos 2x (2x)' dx = 2x + \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Для возврата к исходной переменной t необходимо выразить $\sin 2x$ через t . По формуле двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, затем

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - t^2} \text{ и } \sin 2x = \frac{t}{2} \sqrt{4 - t^2}.$$

Учитывая, что из $t = 2 \sin x$ следует $x = \arcsin \frac{t}{2}$, получаем окончательно:

$$\int \sqrt{4-t^2} dt = 2 \arcsin \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2} + C. \quad \triangleleft$$

Этим методом получается формула (XVI) из дополнительной таблицы интегралов (с. 282).

Пример 2.20. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}.$

▷ Положим

$$t = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

и поскольку $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, извлечем квадратный корень:

$$\frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} = \cos^3 x.$$

Согласно (2.1) имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}} = \int \cos^3 x (\operatorname{tg} x)' dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Для возврата к исходной переменной t выразим $\sin x$ через t :

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \pm \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Выбираем знак «+», так как интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ знак $\sin x$ совпадает со знаком $\operatorname{tg} x$. Окончательно имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{3/2}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} + C. \quad \triangleleft$$

Пример 2.21. $\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^{3/2}}.$

▷ Применим тригонометрическую подстановку

$$t = \frac{1}{\sin x}, \quad t' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тождество $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$ позволяет извлечь корень:
 $\frac{1}{(t^2 - 1)^{3/2}} = \frac{1}{|\operatorname{ctg} x|^3}.$ Получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^{3/2}} &= - \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x |\operatorname{ctg}^3 x|} = - \int \frac{\cos x \sin^2 x |\sin x| \, dx}{\cos^3 x \sin^2 x} = \\ &= - \int \frac{|\sin x| \, dx}{\cos^2 x} = \begin{cases} -1/\cos x + C, & x \in (0, \pi/2) \\ 1/\cos x + C, & x \in (-\pi/2, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Для возврата к исходной переменной t выражаем $\cos x$ через t :

$$\sin x = \frac{1}{t}; \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{|t|} \sqrt{t^2 - 1}.$$

Раскрываем модуль, принимая во внимание совпадение знака $-t$ со знаком искомой первообразной:

$$F(x) = \begin{cases} -1/\cos x, & x \in (0, \pi/2) \\ 1/\cos x, & x \in (-\pi/2, 0) \end{cases}$$

на множестве $(0, \pi/2) \cup (-\pi/2, 0)$. Получаем

$$\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^{3/2}} = -\frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} + C. \quad \triangleleft$$

Правила подбора тригонометрической подстановки для интегрирования иррациональных функций, содержащих радикалы вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, приведены в следующей таблице.

1.	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$ ($x = a \cos t$)
2.	$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \operatorname{tg} t$ ($x = a \operatorname{ctg} t$)
3.	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\sin t}$ ($x = \frac{a}{\cos t}$)

В том случае, когда подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$, применяется подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Она называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. При этом используются формулы:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad x' = \frac{2}{1 + t^2}.$$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.22. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

▷ Сделаем замену переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Формула (2.1) применяется *справа налево*:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x' = \frac{2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad \triangleleft$$

Пример 2.23. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

▷ Применяем универсальную тригонометрическую подстановку и формулу замены переменной *справа налево*:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Нестандартные подстановки.

Рассмотрим несколько примеров, в которых интегралы берутся с помощью специально подобранных подстановок.

Пример 2.24. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx$.

▷ Нетрудно избавиться от иррациональности, сделав замену переменной $t = \sqrt{x+3}$. Нам, очевидно, не удастся представить подынтегральную функцию в виде (2.2), поэтому воспользуемся формулой (2.1) справа налево. Для этого выразим x через t и найдем производную x'_t . Имеем $x = t^2 - 3$, $x' = 2t$ и согласно (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx &= \int \frac{t^2-3+5}{t} 2t dt = 2 \int t^2 dt + 4 \int dt = \\ &= \frac{2}{3} t^3 + 4t + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + 4\sqrt{x+3} + C = \\ &= \frac{2}{3} (x+9)\sqrt{x+3} + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.25. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$.

▷ Воспользуемся тем же приемом устранения радикала, что и в предыдущей задаче. Возьмем $z = \sqrt{1+x^2}$. Тогда $x = \sqrt{z^2-1}$ ($x \geq 0$), $x' = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$. Может показаться, что иррациональность снова возникает, но это не так. Действительно,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx &= \int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} dz = \int \frac{z^2}{z^2-1} dz = \\ &= \int \frac{z^2-1+1}{z^2-1} dz = \int \left(1 + \frac{1}{z^2-1} \right) dz = \\ &= z + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \sqrt{1+x^2} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right| + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 2.26. $\int \sqrt{1+e^{2x}} dx$.

▷ Описанный прием с успехом применяется и в том случае, когда под корнем стоит трансцендентная функция, в данном случае — показательная. Полагаем $z = \sqrt{1+e^{2x}}$. Выражаем x через z : $x = \frac{1}{2} \ln(z^2-1)$ и находим производную: $x' = \frac{z}{z^2-1}$. Получаем

$$\int \sqrt{1+e^{2x}} dx = \int z \frac{z}{z^2-1} dz = \int \frac{z^2}{z^2-1} dz.$$

Последний интеграл был найден в предыдущем примере. Подставляя $z = \sqrt{1 + e^{2x}}$, возвращаемся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2}{z^2 - 1} dz &= z + \ln \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| + C = \\ &= \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.27. $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$.

▷ Используем замену

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{x}}, \quad x = (t^2 - 1)^2$$

и получаем многочлен в качестве новой подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx &= 4 \int t^2(t^2 - 1) dt = 4 \int t^4 dt - 4 \int t^2 dt = \\ &= \frac{4}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + C = \frac{4}{15} t^3 (3t^2 - 5) + C = \\ &= \frac{4}{15} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^3 (3\sqrt{x} - 2) + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.28. $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала выделим целую часть:

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1},$$

затем разделим числитель и знаменатель дроби на e^x . Получим

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Теперь очевидна целесообразность замены $t = e^{-x} - 1$. Применяем (2.1) слева направо:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{2}{e^x - 1} \right) dx = \int dx + 2 \int \frac{1}{e^x - 1} dx = \\ &= x + 2 \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx = x + 2 \ln |e^{-x} - 1| + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите неопределенные интегралы, используя простейшую замену переменной:

$$\begin{array}{lll}
 2.1. \int (x+3)^{10} dx; & 2.2. \int \sqrt{10-x} dx; & 2.3. \int \sin(3x+1) dx; \\
 2.4. \int \frac{x dx}{x^2+3}; & 2.5. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; & 2.6. \int x e^{x^2} dx; \\
 2.7. \int \sin^3 x \cos x dx; & 2.8. \int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}; & 2.9. \int \frac{\ln^3 x}{x} dx; \\
 2.10. \int x^2 \sqrt{x^3-7} dx; & 2.11. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; & 2.12. \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx; \\
 2.13. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2} dx; & 2.14. \int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}}; & 2.15. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+7}}; \\
 2.16. \int \operatorname{tg} x dx; & 2.17. \int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+1}} dx; & 2.18. \int \frac{e^{3x}-1}{e^x} dx; \\
 2.19. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx; & 2.20. \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx; & 2.21. \int \frac{dx}{e^x+2}; \\
 2.22. \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1+4^x}}; & 2.23. \int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx; & 2.24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^4-x^2}}.
 \end{array}$$

Найдите неопределенные интегралы с помощью замены переменной:

$$\begin{array}{ll}
 2.25. \int \frac{x^4 dx}{x^2+6}; & 2.26. \int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}; \\
 2.27. \int \frac{dx}{x^2-7x+10}; & 2.28. \int \frac{2x dx}{4x^2+4x+5}; \\
 2.29. \int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}; & 2.30. \int \frac{2x+3}{\sqrt{4x-3+x^2}} dx; \\
 2.31. \int \cos^2 4,5x dx; & 2.32. \int e^x \sqrt{1-e^x} dx; \\
 2.33. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x+3}}; & 2.34. \int \cos 1,5x \sin 8x dx; \\
 2.35. \int x \sqrt{4+x} dx; & 2.36. \int \frac{dx}{x \sqrt{3x+1}};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.37. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}; & 2.38. \int \frac{x^3 dx}{x^2+x+0,5}; \\ 2.39. \int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}; & 2.40. \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}; \\ 2.41. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}; & 2.42. \int \cos^4 x \sin 2x dx; \\ 2.43. \int \frac{dx}{3+5\cos x}; & 2.44. \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}. \end{array}$$

3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

3.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 3.1. Если функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке X , то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (3.1)$$

Формулу интегрирования по частям можно записать короче:

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx,$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Метод интегрирования по частям состоит в следующем. Нужно представить подынтегральную функцию исходного интеграла в виде произведения двух функций $u(x)$, $v'(x)$ и, пользуясь формулой (3.1), заменить нахождение исходного интеграла $\int uv' dx$ нахождением более простого интеграла $\int vu' dx$.

Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях:

1). Подынтегральная функция содержит в виде множителя одну из функций: $\ln ax$, $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\arctg ax$. В качестве $u(x)$ выбирается эта функция.

2). Подынтегральная функция имеет вид: $P(x)\cos ax$, $P(x)\sin ax$ или $P(x)e^{ax}$, где $P(x)$ — многочлен относительно

переменной x . В качестве $u(x)$ выбирается $P(x)$. При дифференцировании понижается степень многочлена в новом интеграле.

3). Подынтегральная функция имеет вид: $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $\sin(\ln x)$ или $\cos(\ln x)$. После двукратного интегрирования по частям получается линейное алгебраическое уравнение относительно искомого интеграла.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Вычислите интегралы

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}; \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}$$

двумя методами: заменой переменной и интегрированием по частям. Сравните результаты.

2). Докажите формулу

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \right),$$

пользуясь методом интегрирования по частям.

3.3. Примеры решения задач.

Найти неопределенный интеграл, используя метод интегрирования по частям.

Пример 3.1. $\int (x^2 - 3x) \ln x \, dx$.

▷ Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена на $\ln x$. Согласно 1), интегрируем по частям, при этом в качестве $u(x)$ берем $\ln x$, а в качестве $v'(x)$ — многочлен. Получаем

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x) \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = x^2 - 3x \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \end{array} \right| = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.2. $\int \arcsin 2x \, dx$.

▷ Согласно 2), полагаем $u(x) = \arcsin 2x$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \arcsin 2x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin 2x, & v' = 1 \\ u' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \arcsin 2x - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - 4x^2, \quad t' = -8x \end{array} \right| = \\ &= x \arcsin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{t} + C = \\ &= x \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.3. $\int x^2 e^{3x} \, dx$.

▷ Имеем произведение многочлена 2-й степени на e^x . Согласно 2), полагаем $u(x) = x^2$. Дважды интегрируем по частям, понижая степень многочлена:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & v' = e^{3x} \\ u' = 2x, & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} e^{3x} x^2 - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = e^{3x} \\ u' = 1, & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx \right) = \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Отметим, что в случае, упомянутом в 2), многочлен дифференцируется с целью понижения степени. Интегрирование по частям производится столько раз, какова степень многочлена. В случае же, указанном в 1), напротив, многочлен интегрируется, так как необходимо устранить посредством дифференцирования трансцендентную функцию, которая имеет рациональную ($\ln x$, $\arctg x$) или иррациональную ($\arcsin x$) производную.

Пример 3.4. $\int e^x \sin 4x \, dx$.

▷ Подынтегральная функция соответствует 3). Пользуясь описанным в этом пункте приемом, нужно следить за тем, чтобы оба раза интегрировать одну и ту же функцию ($e^{\alpha x}$ или $\sin \beta x$,

все равно какую). В противном случае, вместо уравнения получится тождество:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin 4x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad v' = \sin 4x \\ u' = e^x, \quad v = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{4} \int e^x \cos 4x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad v' = \cos 4x \\ u' = e^x, \quad v = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} e^x \sin 4x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 4x \, dx \right). \end{aligned}$$

Обозначив $\int e^x \sin 4x \, dx = I$, получим уравнение относительно искомого интеграла

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{16} e^x \sin 4x - \frac{1}{16} I \implies \\ I &= e^x \frac{\sin 4x - 4 \cos 4x}{17}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 3.5. $\int x^3(x^2 - 1)^{50} \, dx$.

▷ Представим подынтегральную функцию в виде произведения двух многочленов, один из которых (высокой степени) будем интегрировать, а второй (невысокой степени) — дифференцировать, понижая степень. Для интегрирования многочлена 100-й степени $(x^2 - 1)^{50}$ выделим производную двучлена $x^2 - 1$:

$$x^3(x^2 - 1)^{50} = \frac{x^2}{2} \cdot 2x(x^2 - 1)^{50}.$$

Теперь интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int x^3(x^2 - 1)^{50} \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{x^2}{2}, \quad v' = 2x(x^2 - 1)^{50} \\ u' = x, \quad v = \frac{(x^2 - 1)^{51}}{51} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2(x^2 - 1)^{51}}{102} - \int \frac{x(x^2 - 1)^{51}}{51} \, dx = \\ &= \frac{x^2(x^2 - 1)^{51}}{102} - \frac{(x^2 - 1)^{52}}{2 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{(x^2 - 1)^{51}(51x^2 + 1)}{5304} + C. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 3.6. $\int \sqrt{1+x^2} dx$.

▷ Можно применить подстановку $x = \operatorname{tg} t$, но в данном случае интегрирование по частям более эффективно:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+x^2} & v' = 1 \\ u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right|. \end{aligned}$$

Получаем уравнение относительно искомого интеграла и решаем его:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C. \quad \triangleleft$$

Этим методом получается формула (XVII) из дополнительной таблицы интегралов (с. 282).

Пример 3.7. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

▷ Подходящий выбор u и v' позволяет понизить степень в знаменателе подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{\cos x}, & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} = \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - I + \int \frac{dx}{\sin(x + \pi/2)}. \end{aligned}$$

Последний интеграл был вычислен в примере 2.22. Получено уравнение относительно искомого интеграла:

$$I = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - I + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Решая его, имеем

$$I = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad \triangleleft$$

Пример 3.8. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$

▷ В числителе дроби прибавим и вычтем x^2 :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{arctg} x - \int x \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad v' = \frac{x}{(1 + x^2)^2} \\ u' = 1, \quad v = -\frac{1}{2(1 + x^2)} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{(1 + x^2)} - \int x \cdot \frac{x dx}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1 + x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1 + x^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1 + x^2)} + C. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Дополнительная таблица неопределенных интегралов

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\text{XVI. } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \text{XVII. } \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \\ &+ \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{XVIII. } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \\ &- \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C \end{aligned}$$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

$$3.1. \int x e^x dx; \quad 3.2. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3.3. \int \arcsin x dx; \quad 3.4. \int \ln(2-x) dx;$$

$$3.5. \int x e^{-2x} dx; \quad 3.6. \int \operatorname{arctg} 3x dx;$$

$$3.7. \int x \cos(4-2x); \quad 3.8. \int (3x+1)4^x dx;$$

$$3.9. \int x^2 \sin x dx; \quad 3.10. \int (1-x^2) \ln x dx;$$

$$3.11. \int \frac{\arccos x}{x^2} dx; \quad 3.12. \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 3.13. \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$$

$$3.14. \int x^2 \sin^2 x dx; \quad 3.15. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} dx; \quad 3.16. \int \frac{x dx}{\sin^2 x};$$

$$3.17. \int \cos(\ln x) dx; \quad 3.18. \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad 3.19. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница

1.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Разбиением T отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$ и назовем диаметром разбиения. На каждом отрезке $[x_i, x_{i-1}]$ выберем произвольную точку ξ_i . Множество $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ обозначим ξ , а разбиение с помеченными точками — символом (T, ξ) .

Интегральной суммой функции $f(x)$, соответствующей разбиению (T, ξ) , называется сумма

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T, \xi) = I$, который не зависит от способа разбиения отрезка на части и выбора промежуточных точек ξ_i . Число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Положим по определению

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \text{ если } a > b; \quad (1.1)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (1.2)$$

Теорема 1.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Далее будем рассматривать только интегрируемые функции.

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$2. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

$$3. \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \text{ где } c \in [a, b].$$

$$4. \text{ Если } \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x), \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

$$5. \text{ Если } \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$6. \text{ Если } f(x) \text{ непрерывна на } [a, b], \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0 \\ \text{ и } \int_a^b f(x) dx = 0, \text{ то } f(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b].$$

$$7. \text{ Если } f(x) \text{ — нечетная функция на } [-a, a], \text{ то } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

$$8. \text{ Если } f(x) \text{ — четная функция на } [-a, a], \text{ то}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Свойства 1 и 2 называют линейными свойствами определенного интеграла, свойство 3 — аддитивностью.

Для установления связи между понятиями неопределенного и определенного интегралов рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad t \in [a, b],$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Функция $F(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 1.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)$ является первообразной $f(x)$ на этом отрезке.*

Теорема 1.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует первообразная, а следовательно, и неопределенный интеграл от функции $f(x)$.*

Следующая теорема дает формулу для вычисления определенного интеграла.

Теорема 1.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона–Лейбница:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

1.2. Теоретические упражнения.

1). Известно, что

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$? Приведите примеры.

2). Известно, что

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Следует ли отсюда, что $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a, b]$? Приведите примеры.

1.3. Примеры решения задач.

Вычислить интеграл.

Пример 1.1. $\int_0^1 \left(6x + \frac{\sqrt{3}}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx.$

▷ Воспользуемся линейностью определенного интеграла

$$I = 6 \int_0^1 x dx + \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x + 2} dx.$$

Первообразными для подынтегральных функций x , $\frac{1}{x^2 + 1}$, $\frac{1}{x + 2}$ являются функции $\frac{1}{2}x^2$, $\arctg x$, $\ln|x + 2|$. Применяя формулу Ньютона–Лейбница к каждому из трех интегралов, получаем

$$\begin{aligned} I &= 6 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \sqrt{3} \arctg x \Big|_0^1 - \ln|x + 2| \Big|_0^1 = \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \sqrt{3} (\arctg 1 - \arctg 0) - (\ln 3 - \ln 2) = \\ &= 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \pi - \ln \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 1.2. $\int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{x^2 - 1}.$

▷ Сначала преобразуем подынтегральную функцию, выделив целую часть дроби:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Первообразными функций 1 , $\frac{1}{x^2 - 1}$ являются функции x и $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|$. Теперь, аналогично примеру 1.1, поль-

зуюсь линейностью определенного интеграла и формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx = \int_0^{1/2} dx + \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - 1} = \\
 &= x|_0^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{2} \left(\ln \left| -\frac{1}{3} \right| - \ln |-1|\right) = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{1}{2} (1 - \ln 3). \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 1.3. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$

▷ Подынтегральную функцию можно преобразовать так:

$$\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Первообразная функции $\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$ есть $(-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)$. По формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = (-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \\
 &= -\operatorname{ctg} \pi/3 + \operatorname{ctg} \pi/6 - \operatorname{tg} \pi/3 + \operatorname{tg} \pi/6 = 0. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 1.4. $\int_0^2 |1 - x| dx.$

▷ По определению модуля

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, разобьем искомый интеграл на сумму интегралов по отрезкам

$[0, 1]$, $[1, 2]$ («раскрываем модуль»). Затем к каждому из слагаемых применим формулу Ньютона–Лейбница. Получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = 1. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^3 dx$.

▷ Подынтегральная функция $y = \sin x^3$ является нечетной на отрезке $[-\pi, \pi]$, так как для любого x выполняется равенство: $\sin(-x)^3 = -\sin x^3$. Отсюда, по свойству 7 определенного интеграла, имеем $I = 0$. $\triangleleft$

Пример 1.6. $\int_{-2}^2 \sqrt[3]{x^2} dx$.

▷ Подынтегральная функция является четной на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому для вычисления искомого интеграла воспользуемся свойством 6 определенного интеграла от четной функции. Получим

$$I = 2 \int_0^2 \sqrt[3]{x^2} dx = 2 \left(\frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Big|_0^2 = \frac{6}{5} (2^{5/3} - 0) = \frac{12}{5} \sqrt[3]{4}. \quad \triangleleft$$

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите определенные интегралы:

$$\begin{array}{ll} 1.1. \int_0^{\pi/4} \left(0, 5 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2x\right) dx; & 1.2. \int_0^1 \left(-\frac{5}{x^2+1} + 3^x\right) dx; \\ 1.3. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2} dx; & 1.4. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 1.5. \quad & \int_0^{\pi/2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi; & 1.6. \quad & \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx; & 1.7. \quad & \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}; \\
 1.8. \quad & \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}; & 1.9. \quad & \int_0^{2\pi} |\sin x| dx; & 1.10. \quad & \int_{-1}^1 x \operatorname{tg} x^2 dx.
 \end{aligned}$$

2. Замена переменной в определенном интеграле

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1. Пусть функция $t = t(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ в отрезок $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = t(a)$, $\beta = t(b)$, и функция $t'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(t(x)) t'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt, \quad (2.1)$$

которая называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Метод замены переменной в определенном интеграле похож на метод замены переменной в неопределенном интеграле. Различие состоит, главным образом, в том, что, как правило, нет необходимости производить возврат к исходной переменной, но нужно находить новые пределы интегрирования.

2.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите свойства определенного интеграла:

1) Если $f(x)$ — нечетная функция на $[-a, a]$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

2) Если $f(x)$ — четная функция на $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2). Известно, что $\int_a^b f(x) dx = S$. Вычислите:

1) $\int_a^b f(x - a - b) dx$, если $f(x)$ — четная функция.

2) $\int_a^b f(x - a - b) dx$, если $f(x)$ — нечетная функция.

3) $\int_{-b}^a f(x) dx$, если $f(x)$ — а) четная функция; б) нечетная функция.

2.3. Примеры решения задач.

Вычислить интеграл.

Пример 2.1. $\int_1^2 (2x - 3)^{10} dx$.

▷ Сделаем замену переменной $t = 2x - 3$. Найдем отрезок $[\alpha, \beta]$, в который функция $t(x) = 2x - 3$ отображает отрезок $[1, 2]$. Учитывая, что эта функция возрастает на отрезке $[1, 2]$, имеем $\alpha = t(1) = -1$, $\beta = t(2) = 1$. Таким образом, найдены новые пределы интегрирования $\alpha = -1$, $\beta = 1$. По формуле (2.1) получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{2} (2x - 3)^{10} 2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x - 3, \quad t' = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \implies -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{10} dt = \frac{t^{11}}{2 \cdot 11} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{11}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.2. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) dx$.

▷ Сделаем линейную замену переменной, определим новые пределы интегрирования и применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)' dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = 3x - \pi/4, \quad t' = 3 \\ \pi/4 \leq x \leq \pi/3 \implies \pi/2 \leq t \leq 3\pi/4 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin t \, dt = \\
 &= -\frac{1}{3} \cos t \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\frac{1}{3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6}. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 2.3. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x \, dx.$

▷ Здесь, как и в примере 2.16 главы 1, пользуемся основным тригонометрическим тождеством и, сделав замену $t = \sin x$, получаем интеграл от многочлена. В отличие от упомянутого примера, возврат к исходной переменной не производится. Находим новые пределы интегрирования и пользуемся формулой Ньютона–Лейбница.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \quad t' = \cos x \\ \pi \leq x \leq 3\pi/2 \implies 0 \geq t \geq -1 \end{array} \right| = \int_0^{-1} t^4 (1 - t^2) \, dt = \\
 &= \int_{-1}^0 (t^6 - t^4) \, dt = \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{35}. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 2.4. $\int_3^4 \frac{dt}{t\sqrt{25-t^2}}.$

▷ Преобразуем подынтегральную функцию. Вынесем в знаменателе из-под корня t . Получим $\frac{1}{t\sqrt{25-t^2}} = \frac{1}{t^2\sqrt{(5/t)^2 - 1}}$. Теперь видна целесообразность замены переменной $x = 5/t$. Имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_3^4 \frac{dt}{t\sqrt{25-t^2}} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2\sqrt{(5/t)^2-1}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} x = 5/t, \quad x' = -5/t^2 \\ 3 \leq t \leq 4 \implies 5/3 \geq x \geq 5/4 \end{array} \right| = -\frac{1}{5} \int_{5/3}^{5/4} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \\
 &= \frac{1}{5} \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| \Big|_{5/4}^{5/3} = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 2.5. $\int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$.

▷ Особенность данного интеграла состоит в том, что первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Поэтому невозможно вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Для решения данной задачи воспользуемся свойствами функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Представим этот интеграл, пользуясь свойством аддитивности, в виде суммы двух интегралов:

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = I_1 + I_2.$$

Покажем, что $I_1 = -I_2$. Для этого в интеграле I_2 сделаем замену переменной $x = \pi - t$:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \pi - t, \quad x' = -1 \\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \implies \frac{\pi}{2} \geq t \geq 0 \end{array} \right| = \\
 &= - \int_{\pi/2}^0 \operatorname{arctg}(\cos(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos(\pi - t)) dt.
 \end{aligned}$$

Пользуясь формулой приведения $\cos(\pi - t) = -\cos t$ и нечетностью функции $y = \operatorname{arctg} x$, получим

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(-\cos t) dt = - \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos t) dt.$$

Последний интеграл отличается от I_1 только обозначением переменной интегрирования. Поэтому $I_1 = -I_2$ и $I = I_1 - I_1 = 0$. $\triangleleft$

Вычисление определенного интеграла часто удается упростить, используя свойства симметрии подынтегральной функции. В данном примере мы воспользовались симметрией графика функции $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$ на отрезке $[0, \pi]$ относительно точки $(\pi/2, 0)$.

Пример 2.6. $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$.

▷ Подынтегральная функция является четной на отрезке $[-3, 3]$. Из свойства 8 следует, что

$$I = 2 \int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx = 2I_1.$$

Для вычисления интеграла I_1 сделаем тригонометрическую подстановку $x = 3 \sin t$, $x' = 3 \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, которая позволит освободиться от иррациональности в подынтегральной функции. Мы рассматривали тригонометрические подстановки в неопределенном интеграле (примеры 2.19–2.21, глава 1). Они особенно эффективны при вычислении определенных интегралов, так как в этом случае нет надобности производить трудоемкий возврат к исходной переменной. Вычисление интеграла начнем с определения нового выражения для подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} f(x(t))x'(t) &= 9 \sin t \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t = 81 \sin^2 t \cdot \cos^2 t = \\ &= \frac{81}{4} \sin^2 t = \frac{81}{8} (1 - \cos 4t). \end{aligned}$$

Находим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 3 \sin t, \quad x' = 3 \cos t \\ 0 \leq x \leq 3 \implies 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{81}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{81}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{81}{16} \pi. \end{aligned}$$

Окончательно получаем $I = 2I_1 = \frac{81\pi}{8}$.

◁

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите определенные интегралы с помощью замены переменной:

$$2.1. \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx; \quad 2.2. \int_{-\pi/12}^0 \operatorname{tg} 3x dx; \quad 2.3. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$2.4. \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+8} dx; \quad 2.5. \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \sin x^3 dx; \quad 2.6. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} t}}{t^2+1} dt;$$

$$2.7. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}; \quad 2.8. \int_2^3 \frac{dx}{x \ln x}; \quad 2.9. \int_0^1 (e^x - 1) e^x dx;$$

$$2.10. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx; \quad 2.11. \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx; \quad 2.12. \int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$2.13. \int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}; \quad 2.14. \int_{-1/4}^0 \frac{dx}{4x^2+8x+3};$$

$$2.15. \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x dx; \quad 2.16. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$2.17. \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx; \quad 2.18. \int_0^{3/2} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$2.19. \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx; \quad 2.20. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

3.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 3.1. Если функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx, \quad (3.1)$$

которая называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Выразите искомый интеграл через данный:

- 1) $\int_a^b f(x) dx = S$. Вычислите $\int_a^b x f'(x) dx$, если функция $f'(x)$ непрерывна и $f(a) = f(b) = 0$.
- 2) $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = S$. Вычислите $\int_0^\pi f'(x) \sin x dx$, если $f'(x)$ непрерывна.
- 3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin x dx = S$. Вычислите $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f'(x) \cos x dx$, если $f'(x)$ непрерывна.

2). Докажите, что если $f''(x)$ — непрерывная функция, то

$$\int_a^b x f''(x) dx = b f'(b) - f(b) - (a f'(a) - f(a)).$$

3.3. Примеры решения задач.

Вычислить интеграл.

Пример 3.1. $\int_0^{1/4} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+2x}} dx.$

▷ Положим

$$u(x) = \arcsin 2x, \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

Тогда

$$u'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \sqrt{1+2x}.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1, поскольку их производные

$$u'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

непрерывны на отрезке $[0, 1/4]$. По формуле (3.1) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/4} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+2x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin 2x, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \\ u' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad v = \sqrt{1+2x} \end{array} \right| = \\ &= \left(\arcsin 2x \cdot \sqrt{1+2x} \right) \Big|_0^{1/4} - \int_0^{1/4} \sqrt{1+2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \arcsin \frac{1}{2} - 2 \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = \\ &= \frac{\pi\sqrt{6}}{12} - 2 \left(-\sqrt{1-2x} \right) \Big|_0^{1/4} = \frac{\pi\sqrt{6}}{12} + \sqrt{2} - 2. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.2. $\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

▷ Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x; \, v' = 1 \\ u' = 2 \ln x \frac{1}{x}; \, v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx = \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x \, dx. \end{aligned}$$

Применив формулу (3.1) еще раз, вычислим интеграл $I_1 = \int_1^e \ln x \, dx$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \, v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}; \, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = \\ &= e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1. \end{aligned}$$

В результате получим $I = e - 2I_1 = e - 2$. ◁

Пример 3.3. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$.

▷ Учитывая четность подынтегральной функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеем

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \, v' = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \\ u' = 1; \, v = -\operatorname{arctg}(\cos x) \end{array} \right| = \\ &= -2x \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) \, dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен 0 (пример 2.5). Окончательно получаем

$$I = -2x \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -2\pi \operatorname{arctg}(\cos \pi) = -2\pi \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi^2}{2}. \quad \triangleleft$$

Пример 3.4. $\int_0^{\pi/3} e^x \cos 3x \, dx.$

▷ Для вычисления этого интеграла используется прием, описанный в разделе 1.3 главы 1 и продемонстрированный там же в примере 3.4 для случая неопределенного интеграла. Дважды интегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad v' = \cos 3x \\ u' = e^x; \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{3} e^x \sin 3x \Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} e^x \sin 3x \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} (e^{\pi/3} \sin \pi - e^0 \sin 0) - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} e^x \sin 3x \, dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad v' = \sin 3x \\ u' = e^x; \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \frac{1}{9} e^x \cos 3x \Big|_0^{\pi/3} - \\
 &\quad - \frac{1}{9} \int_0^{\pi/3} e^x \cos 3x \, dx = -\frac{1}{9} (e^{\pi/3} + 1) - \frac{1}{9} I.
 \end{aligned}$$

Мы получили, таким образом, линейное уравнение относительно искомого интеграла. Решая его, находим $I = -\frac{1}{10} (e^{\pi/3} + 1)$. ◁

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите определенные интегралы с помощью интегрирования по частям.

$$\begin{array}{lll}
 3.1. \int_{\pi/4}^{\pi/3} x \cos x \, dx; & 3.2. \int_0^1 \arccos x \, dx; & 3.3. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx; \\
 3.4. \int_0^{\pi/2} \varphi \sin 2\varphi \, d\varphi; & 3.5. \int_0^{1/2} (2x+1)e^{2x} \, dx; & 3.6. \int_{-1}^0 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx;
 \end{array}$$

$$3.7. \int_1^2 x \log_2 x \, dx;$$

$$3.9. \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{x^3} \, dx;$$

$$3.11. \int_0^{\pi/4} \frac{x \, dx}{\cos^2 x};$$

$$3.13. \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx;$$

$$3.15. \int_{\pi/4}^{\pi} (x^2 + 2x) \cos 2x \, dx;$$

$$3.17. \int_{-\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx;$$

$$3.19. \int_0^1 \arccos^2 x \, dx.$$

$$3.8. \int_e^{2e} \ln 2x \, dx;$$

$$3.10. \int_1^{e-1} \ln(x^2 + 1) \, dx;$$

$$3.12. \int_2^3 \sin(\ln x) \, dx;$$

$$3.14. \int_{-1/2}^{1/2} (x^2 + 1)e^{2x} \, dx;$$

$$3.16. \int_0^{\pi/5} e^{3x} \cos 5x \, dx;$$

$$3.18. \int_{1/e}^e |\ln x| \, dx;$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Площадь плоской фигуры

1.1. Основные понятия и теоремы. Введем понятие площади плоской фигуры. Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Пусть плоская фигура обладает следующими свойствами. Она заключена между прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$. Длина сечения фигуры каждой прямой, параллельной оси OY , есть функция $l(x)$, интегрируемая на $[a, b]$. *Площадью фигуры* назовем число

$$S = \int_a^b l(x) dx. \quad (1.1)$$

Отметим, что площадь инвариантна относительно выбора системы координат.

Криволинейной трапецией называется множество точек плоскости

$$\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq y(x), x \in [a, b]\},$$

ограниченное прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y(x)$, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1.1. *Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле*

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (1.2)$$

Криволинейным сектором называется фигура

$$\Phi = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]\},$$

ограниченная двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β и кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Теорема 1.2. *Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле*

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (1.3)$$

1.2. Теоретические упражнения.

1). Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- 1) $y = 0$, $y = \sin 2n\pi x$, $0 \leq x \leq 2\pi$;
- 2) $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = \cos 2n\pi x$;
- 3) $y = 0$, $y = |\sin 2n\pi x|$, $0 \leq x \leq \pi$;
- 4) $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = |\cos 2n\pi x|$;
- 5) $y = 1$, $x = 0$, $y = \cos 2n\pi x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

2). Найдите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = x^2 + a^2$, касательной к нему в точке $M(a; 2a^2)$ и осью OY .

3). Найдите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = -x^2 + 2a^2$, касательной к нему в точке $M(a; a)$ и осью OX .

4). Найдите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = x^2 + a^2$ и касательными, проведенными к нему из начала координат.

1.3. Примеры решения задач.

Пример 1.1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2^x$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.*

▷ 1. Изобразим данную фигуру. Для этого построим прямые $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ и график функции $y = 2^x$. Получили криволинейную трапецию (см. чертеж).

2. Площадь фигуры вычислим по формуле (1.2):

$$S = \int_{-1}^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-1}^2 = \frac{7}{2 \ln 2}. \quad \triangleleft$$

Пример 1.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 3$.

▷ 1. Построим графики функций $y = x$ и $y = 1/x^2$. Они пересекаются в одной точке. Решив уравнение $x = 1/x^2$, найдем абсциссу точки пересечения: $x = 1$. Данная фигура — криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ и графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1/x^2, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

непрерывной на отрезке $[0, 3]$ (см. чертеж).

2. Для вычисления площади применим формулу (1.2). Учитывая, что подынтегральная функция на отрезках $[0, 1]$ и $[1, 3]$ задана разными формулами, и используя аддитивность определенного интеграла, получим

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^3 = \frac{7}{6}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y = \arcsin x$.

▷ 1. Изобразим заданную фигуру. Она не является криволинейной трапецией относительно оси OX . Ее можно рассматри-

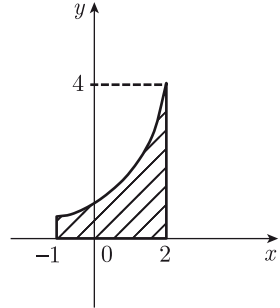


Рисунок к примеру 1.1

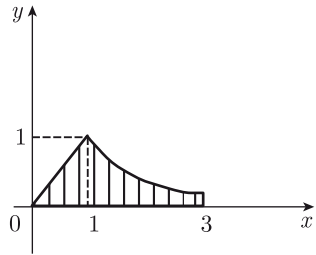


Рисунок к примеру 1.2

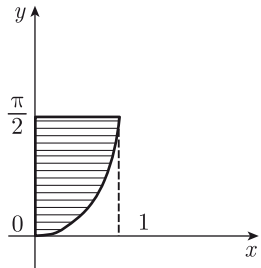


Рисунок к примеру 1.3

вать как криволинейную трапецию относительно оси OY , ограниченную прямыми $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $x = \sin y$, обратной к функции $y = \arcsin x$ на отрезке $[0, 1]$ (см. чертеж).

2. Площадь фигуры найдем, пользуясь формулой (1.2) (роль независимой переменной играет y):

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = -\cos y \Big|_0^{\pi/2} = 1. \quad \triangleleft$$

Пример 1.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

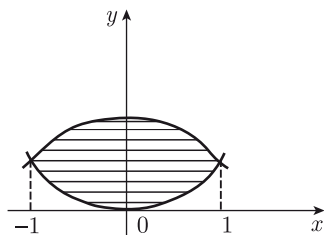


Рисунок к примеру 1.4

▷ 1. Изобразим данную фигуру. Для этого построим графики функций $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$. Найдем абсциссы точек пересечения графиков, решив уравнение $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2$. Оно равносильно биквадратному уравнению $x^4 + x^2 - 2 = 0$ и имеет корни $x = -1$, $x = 1$. Таким образом, рассматриваемые графики пересекаются в двух точках (см. чертеж).

2. Данная фигура не является криволинейной трапецией. Вычислим ее площадь, пользуясь непосредственно определением. Фигура заключена между прямыми $x = -1$ и $x = 1$. Длина сечения фигуры прямой, параллельной оси OY , есть функция $l(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2$, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому

$$S = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

Пример 1.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \sin 2\varphi$.

▷ 1. Кривая задана уравнением в полярных координатах. Определим значения φ , при которых $r \geq 0$. Решив неравенство $\sin 2\varphi \geq 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$, получим $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, причем $r = 0$ при $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Поскольку функция $\sin 2\varphi$

имеет период $T = \pi$, то $r(\varphi) = r(\varphi + \pi)$. А это означает, что кривая симметрична относительно начала координат. Покажем, что кривая симметрична и относительно прямой $y = x$. Для этого нужно проверить выполнение равенства $r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r(\varphi)$. В нашем случае имеем $\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = \sin 2\varphi$. Таким образом, фигура, ограниченная заданной кривой, состоит из двух одинаковых частей, расположенных в первой и третьей четвертях. Она симметрична относительно прямой $y = x$ (см. чертеж).

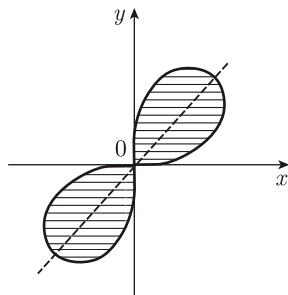


Рисунок к примеру 1.5

2. Найдем площадь четвертой части заданной фигуры. Это криволинейный сектор

$$\Phi = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq \sin 2\varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\},$$

площадь S_1 которого вычислим по формуле (1.3):

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi}{16}.$$

Площадь всей фигуры равна $S = 4S_1 = \frac{\pi}{4}$.

<

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.1. $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.

1.2. $y = e^{2x}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

1.3. $y^2 = 4x$; $x = 2$.

1.4. $y = x^3$; $y = 8$; $x = 0$.

1.5. $y = \sin 2x$; $y = \cos 2x$, $0 \leq x \leq \pi/8$; $x = 0$.

1.6. $y = 1/(x-1)$; $y = 5-2x$.

1.7. $y = \frac{2}{3} \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $x = 0$.

1.8. $x = \sqrt{2y}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 8$.

$$1.9. y = \cos x; y = \operatorname{ctg} x; x = \pi/6; x = 3\pi/4.$$

$$1.10. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$1.11. y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2; x = 0; x = \pi/2; y = 0.$$

$$1.12. y = \frac{|4 - x^2|}{4}; y = 7 - |x|.$$

$$1.13. y = 4 - \frac{6}{|x+1|}; y = |2 - x|. 1.14. \rho = a \cos 2\varphi, a > 0.$$

$$1.15. \rho = 4 \sin^2 \varphi.$$

$$1.16. \text{Найти площади фигур, на которые парабола } y = x^2/2 \text{ делит круг } x^2 + y^2 \leq 8.$$

2. Объем тела

2.1. Основные понятия и теоремы. Пусть тело обладает следующими свойствами. Оно заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, где $a < b$. Площадь сечения тела плоскостью, параллельной плоскости YOZ , есть функция $S(x)$, интегрируемая на $[a, b]$. *Объемом тела* назовем число

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (2.1)$$

Отметим, что объем инвариантен относительно выбора системы координат.

Теорема 2.1. Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции

$$\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq y(x), x \in [a, b]\}$$

с основанием, лежащим на этой оси, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (2.2)$$

2.2. Теоретические упражнения.

1). Найдите объем тела, образованного вращением кривой

- 1) $y = \sin 2\pi x$, $x \in [0, 2\pi]$ вокруг оси OX ;
- 2) $y = \cos 2\pi x$, $x \in [0, 2\pi]$ вокруг оси OX .

2.3. Примеры решения задач.

Пример 2.1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$ и графиком функции $y = \cos 2x$.

▷ 1. Определим вид фигуры. Она состоит из двух частей, симметричных относительно точки с координатами $(\frac{\pi}{4}, 0)$. Одна из этих частей — это криволинейная трапеция

$$\Phi = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \cos 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\},$$

основание которой лежит на оси OX (см. чертеж).

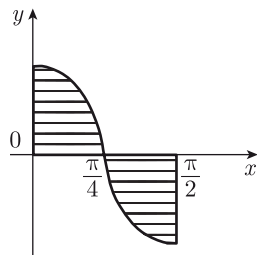


Рисунок к примеру 2.1

2. Найдем объем половины заданного тела. Это тело образовано вращением трапеции Φ вокруг своего основания. Поэтому для вычисления его объема применим формулу (2.2):

$$V_1 = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Окончательно получаем $V = 2V_1 = \frac{\pi^2}{4}$. <

Пример 2.2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = 8$, $x = 0$ и графиком функции $y = x^3$.

▷ 1. Определим вид фигуры. Кривая $y = x^3$ пересекается с прямой $y = 8$ в точке $(2, 8)$. Фигура Φ является криволинейной трапецией, основание которой лежит не на оси OX , а на оси OY . Она ограничена

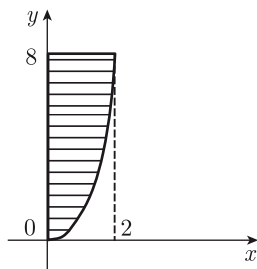


Рисунок к примеру 2.2

прямыми $y = 8$, $x = 0$ и графиком функции $x = \sqrt[3]{y}$, обратной к функции $y = x^3$ на отрезке $[0, 2]$ (см. чертеж).

$$\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt[3]{y}, y \in [0, 8]\}.$$

2. Вычислим объем тела. Основание трапеции Φ лежит на оси вращения OY , поэтому применим формулу (2.2) (y — переменная интегрирования).

$$V = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \frac{96\pi}{5}. \quad \triangleleft$$

Пример 2.3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболami $y = x^2$ и $y^2 = x$.

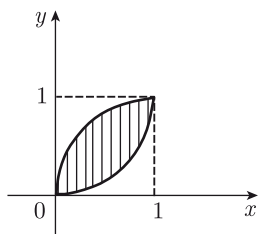


Рисунок к примеру 2.3

$\triangleright$ 1. Определим вид фигуры. Найдем абсциссы точек пересечения парабол, решив уравнение $x^2 = \sqrt{x}$. Получим $x = 0$ и $x = 1$. Таким образом, фигура не является криволинейной трапецией (см. чертеж):

$$\Phi = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, x \in [0, 1]\}.$$

2. Для вычисления объема заданного тела теорема 2.1 не применима и поэтому вычислим объем тела по определению. Тело заключено между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$. Сечение тела плоскостью, параллельной YOZ , представляет собой кольцо, образованное окружностями радиусов x^2 и $\sqrt{x}$. Площадь сечения равна

$$S(x) = \pi \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right) = \pi(x - x^4).$$

Функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. По формуле (2.1) находим объем тела

$$V = \int_0^1 S(x) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}. \quad \triangleleft$$

Пример 2.4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = e$, $y = \ln x$.

▷ 1. Определим вид фигуры. График функции $y = \ln x$ пересекается с прямой $y = 0$ при $x = 1$, а с прямой $x = e$ при $y = 1$. Фигура является криволинейной трапецией (2.2):

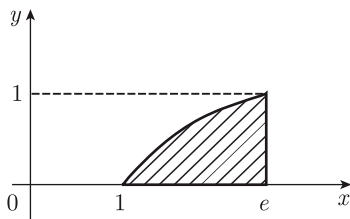


Рисунок к примеру 2.4

$$\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \ln x, \\ x \in [1, e]\}.$$

2. Найдем объем тела. Основание трапеции Φ не лежит на оси вращения OY , поэтому теорема 2.1 не применима. Вычислим объем тела по определению. Тело заключено между плоскостями $y = 0$ и $y = 1$. Сечение тела плоскостью, параллельной XOZ , представляет собой кольцо. Площадь сечения $S(y) = \pi(e^2 - (e^y)^2)$, где $x = e^y$ — функция, обратная к функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$. По формуле (2.1) находим объем тела:

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2y}) dy = \frac{\pi}{2}(e^2 + 1). \quad \triangleleft$$

Пример 2.5. Вычислить объем прямого конуса высоты h , в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b .

▷ Данный конус не является телом вращения, поэтому для нахождения его объема нельзя применить теорему 2.1. Вычислим объем по определению. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию и расположенной на расстоянии z от вершины. Как известно из геометрии, это сечение представляет собой эллипс. Полуоси этого эллипса обозначим x и y ; его площадь $S(z)$ есть функция переменной z . Эллипс, лежащий в сечении, подобен эллипсу, лежащему в основании конуса, с коэффициентом подобия $k = \frac{z}{h}$. Площадь эллипса с полуосями a и b равна πab (см. задачу 1.10). Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Отсюда

$$S(z) = k^2 \pi ab = \frac{z^2}{h^2} \pi ab.$$

По формуле (2.1) получаем

$$V = \int_0^h S(z) dz = \frac{\pi ab}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \pi abh. \quad \triangleleft$$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

2.1. $y = \sin x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi$; OX .

2.2. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$; OX .

2.3. $xy = 4$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$; OX .

2.4. $y = \cos x$; $y = 2 \cos x$; $x = -\pi/2$; $x = \pi/2$; OX .

2.5. $y = 4 - x^2$, $x \geq 0$; $y = 3x$; $y = 0$; OX .

2.6. $y^2 = 4 - x$; $x = 0$; OY .

2.7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $y = 0$; OX и OY .

2.8. $y = 2x - x^2$; $y = 0$; OY .

2.9. $y = xe^x$; $y = 0$; $x = 1$; OX .

2.10. $y^2 = (x + 4)^3$; $x = 0$; OY .

2.11. $y = \arcsin x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; OX .

2.12. $y = e^x - 1$; $y = 2$; $x = 0$; OY .

2.13. Вычислите объем усеченного конуса с радиусами оснований r , R и высотой H .

2.14. Вычислите объем шарового слоя, отсеченного от шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$, $x = -2$.

2.15. Оси двух цилиндров радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите объем общей части цилиндров.

3. Длина кривой

3.1. Основные понятия и теоремы. Множество точек плоскости с координатами (x, y) , удовлетворяющими уравнениям

$x = x(t)$, $y = y(t)$, где функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, называют *кривой, заданной параметрически* и обозначают так:

$$L = \{(x, y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\}; \quad (3.1)$$

переменную t называют параметром.

Параметрически заданная кривая (3.1) называется *гладкой*, если функции $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Введем понятие длины кривой. Пусть T — произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ и $\lambda(T)$ — его диаметр. Точке t_i отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствует точка $A_i(x(t_i), y(t_i))$ на кривой L . Впишем в кривую L ломаную с вершинами в точках A_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Если l_i — длина звена $A_{i-1}A_i$ ломаной, то длина $l(T)$ всей ломаной равна сумме длин составляющих ее звеньев, т. е. $l(T) = \sum_{i=1}^n l_i$.

Кривая L называется *спрямляемой*, если существует $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l(T) = l$. Число l называется *длиной кривой* L .

Теорема 3.1. *Гладкая параметрически заданная кривая (3.1) спрямляема, и ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.2)$$

График непрерывной функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, можно рассматривать как частный случай кривой, заданной параметрически:

$$L = \{(x, y) \mid x = t, y = y(t), t \in [a, b]\}. \quad (3.3)$$

Здесь в роли параметра t выступает аргумент x . В этом случае формула (3.2) принимает вид

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3.4)$$

График функции в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, также можно представить в виде параметрически заданной кривой

$$L = \{(x, y) \mid x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in [\alpha, \beta]\}. \quad (3.5)$$

Это представление получается переходом от полярных координат к декартовым, причем параметром служит полярный угол φ . Длина кривой в полярных координатах вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (3.6)$$

3.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что длина дуги эллипса $x = a \cos t$; $y = b \sin t$ равна длине одной волны синусоиды $y = c \sin \frac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2). Докажите, что длина дуги параболы $y = \frac{x^2}{2p}$, соответствующая интервалу $0 \leq x \leq a$, равна длине дуги спирали $\rho = p\varphi$, соответствующей интервалу $0 \leq \rho \leq a$.

3.3. Примеры решения задач.

Пример 3.1. Найти длину части полукубической параболы $y = 2x^{3/2}$, заключенной между прямыми $x = 0$ и $x = 11$.

▷ Заданная кривая — график функции $y = 2x^{3/2}$, $x \in [0, 11]$. Длину кривой найдем по формуле (3.4). Целесообразно выделить следующие этапы вычислений. Сначала найдем производную $y'(x) = 3x^{1/2}$. Из непрерывности производной на отрезке $[0, 11]$ следует возможность применения формулы (3.4). Теперь найдем подкоренное выражение: $1 + (y'(x))^2 = 1 + 9x$. Наконец, вычислим интеграл:

$$l = \int_0^{11} \sqrt{1 + 9x} dx = \frac{2}{27} (1 + 9x)^{3/2} \Big|_1^{11} = \frac{2}{27} (100^{3/2} - 1) = \frac{222}{3}. \triangleleft$$

Пример 3.2. Найти длину астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

▷ Покажем, что астроида состоит из четырех одинаковых частей. Рассмотрим дугу астроида

$$L_1 = \left\{ (x, y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Она лежит в 1-й четверти, так как координаты всех ее точек неотрицательны. Покажем, что дуга астроиды, расположенная во 2-й четверти и соответствующая изменению параметра на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, получается из L_1 симметрией относительно оси OY . Для этого каждому $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ сопоставим $t_1 = \pi - t$, $t_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, и проверим, что $x(t_1) = -x(t)$ и $y(t_1) = y(t)$. Имеем

$$x(t_1) = 2 \cos^3(\pi - t) = -2 \cos^3 t = -x(t);$$

$$y(t_1) = 2 \sin^3(\pi - t) = 2 \sin^3 t = y(t).$$

Таким образом, показано, что дуга L_2 астроиды, соответствующая изменению параметра на отрезке $[0, \pi]$, состоит из 2-х одинаковых частей. Покажем, что дуга астроиды, соответствующая изменению параметра t на отрезке $[\pi, 2\pi]$, получается из L_2 симметрией относительно оси OX . Для этого каждому $t \in [0, \pi]$ сопоставим $t_1 = 2\pi - t$ и, аналогично предыдущему, получим $x(2\pi - t) = x(t)$ и $y(2\pi - t) = -y(t)$, что и означает симметрию относительно оси OX (см. чертеж).

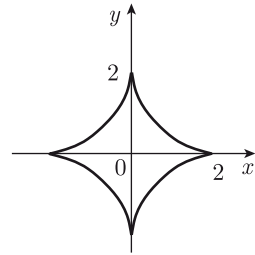


Рисунок к примеру 3.2

Итак, из симметрии астроиды следует, что для решения задачи достаточно найти длину четвертой части кривой, расположенной в первой четверти, а затем увеличить полученный результат в четыре раза. Поскольку кривая L_1 задана параметрически, то ее длину находим по формуле (3.2). Сначала найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$x'(t) = -6 \cos^2 t \sin t; \quad y'(t) = -6 \sin^2 t \cos t.$$

Далее, найдем и упростим подкоренное выражение:

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= 36 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) = \\ &= 36 \sin^2 t \cos^2 t = 9 \sin^2 2t. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл: $l_1 = 3 \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt = 3$. Окончательно получаем $l = 4l_1 = 12$. ◁

Пример 3.3. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

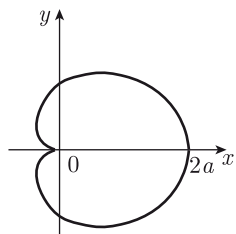


Рисунок к примеру 3.3

▷ Покажем, что кривая симметрична относительно полярной оси. Для этого достаточно проверить выполнение равенства $r(2\pi - \varphi) = r(\varphi)$. Имеем: $a(1 + \cos(2\pi - \varphi)) = a(1 + \cos \varphi)$. Найдем длину части кривой, расположенной выше полярной оси и соответствующей изменению угла φ от 0 до π (см. чертеж). Длину этой кривой найдем по формуле (3.6). Подкоренное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= a^2 ((1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi) = \\ &= 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл:

$$l_1 = \int_0^\pi \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a^2 \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 4a.$$

Наконец, найдем длину всей кривой: $l = 2l_1 = 8a$.

◁

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите длину кривой:

3.1. $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

3.2. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, -1 \leq x \leq 1$.

3.3. $y = \frac{4}{5}x^{5/4}, 0 \leq x \leq 9$.

3.4. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 5$.

3.5. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

3.6. $y = 2 - e^x, \frac{\ln 3}{2} \leq x \leq \frac{\ln 8}{2}$.

3.7. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.

$$3.8. y = \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

$$3.9. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

$$3.10. y = \frac{x}{6} \sqrt{x+12}, \quad -11 \leq x \leq -3.$$

$$3.11. x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$3.12. r = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$3.13. 5y^3 = x^2, \text{ заключенной внутри окружности } x^2 + y^2 = 6.$$

$$3.14. 2y = x^2 - 2 \text{ между точками пересечения с осью } OX.$$

$$3.15. r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}. \quad 3.16. r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Найдите периметр фигуры, ограниченной линиями:

$$3.17. x^2 = (y+1)^3 \text{ и } y = 4. \quad 3.18. y^2 = 6x \text{ и } 2x = 3.$$

4. Площадь поверхности вращения

4.1. Основные понятия и теоремы. Определим площадь поверхности P , образованной вращением вокруг оси OX кривой

$$L = \{(x, y) \mid x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\}. \quad (4.1)$$

Пусть T — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, $\lambda(T)$ — его диаметр. Впишем в кривую L ломаную с вершинами в точках $A_i(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$. При вращении ломаной вокруг оси OX получается поверхность $P(T)$, составленная из боковых поверхностей усеченных конусов. Ее площадь равна

$$S(P(T)) = \pi \sum_{i=1}^n (y(t_{i-1}) + y(t_i)) l_i,$$

где l_i — длина i -го звена ломаной.

Площадью поверхности вращения P называется число

$$S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(P(T)).$$

Теорема 4.1. Пусть поверхность P образована вращением кривой (4.1) вокруг оси OX , причем $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле

$$l = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.2)$$

Пусть поверхность получена вращением вокруг оси OX графика функции в декартовых координатах. Тогда формула для вычисления площади поверхности принимает вид

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (4.3)$$

Если поверхность получена вращением вокруг полярной оси графика функции в полярных координатах, то из (4.2) следует формула площади поверхности

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} |\sin \varphi| d\varphi. \quad (4.4)$$

4.2. Теоретические упражнения.

- 1). Докажите, что площадь поверхности шарового пояса равна произведению длины окружности большого круга на высоту пояса.
- 2). Напишите формулу площади поверхности вращения гладкой кривой относительно оси OY .

4.3. Примеры решения задач.

Пример 4.1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX части параболы $y = \sqrt{2x+1}$, заключенной между точками с абсциссами $x = 1$ и $x = 7$.

▷ Поверхность образована вращением вокруг оси OX графика функции $y = \sqrt{2x+1}$, $x \in [1, 7]$ (см. чертеж). Поэтому для вычисления площади поверхности применим формулу (4.3). Сначала найдем производную: $y'(x) = (2x+1)^{-1/2}$. Затем упростим подкоренное выражение:

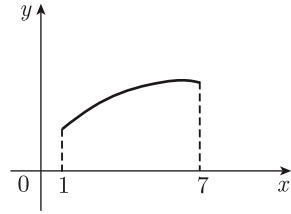


Рисунок к примеру 4.1

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + ((2x+1)^{-1/2})^2 = \frac{2(x+1)}{2x+1}.$$

Наконец, вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^7 \sqrt{2x+1} \sqrt{\frac{2(x+1)}{2x+1}} dx = 2\pi\sqrt{2} \int_1^7 \sqrt{x+1} dx = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left. \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right|_1^7 = \frac{112\pi}{3}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Пример 4.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX одной арки циклоиды

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

▷ Циклоида представляет собой кривую, расположенную выше оси OX и пересекающую эту ось при $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Дуга циклоиды, заключенная между двумя соседними точками пересечения с осью OX , называется аркой. Рассмотрим дугу, соответствующую изменению параметра t на отрезке $[0, 2\pi]$,

$$L = \{(x, y) \mid x = t - \sin t, \ y = 1 - \cos t, \ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Эта часть циклоиды называется первой аркой. Любую арку циклоиды можно получить из первой сдвигом вдоль оси OX на $2\pi k$, так как $x(t + 2\pi k) = x(t) + 2\pi k$, $y(t + 2\pi k) = y(t)$. Поэтому поверхности, образованные вращением вокруг OX любых двух арок, имеют одинаковую площадь. Найдем площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX первой арки циклоиды (см. чертеж). Кривая задана параметрически, поэтому для вычисления площади применим формулу (4.2).

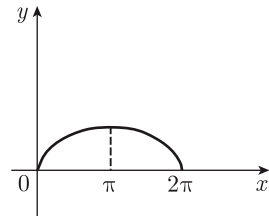


Рисунок к примеру 4.2

Найдем подкоренное выражение:

$$\begin{aligned}x' &= 1 - \cos t, \quad y' = \sin t; \\(x')^2 + (y')^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t).\end{aligned}$$

Чтобы извлечь корень, применим формулу $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Получим

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt.$$

Замена переменной $z = \frac{t}{2}$ дает интеграл из примера 2.16, гл. 1:

$$S = 16\pi \int_0^{\pi} \sin^3 z dz = 16\pi \left(\frac{1}{3} \cos^3 z - \cos z \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi. \quad \triangleleft$$

Пример 4.3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой $y^2 = x + 4$, $-4 \leq x \leq 2$.

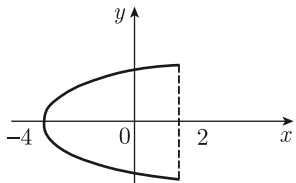


Рисунок к примеру 4.3

▷ Заданная кривая — парабола, симметричная относительно оси OX (см. чертеж). Поэтому при вращении вокруг оси OX как всей параболы, так и ее половины, лежащей выше OX , получается одна и та же поверхность. Дуга параболы, лежащая выше OX , есть график функции $y = \sqrt{x + 4}$, $x \in [-4, 2]$, и для нахождения площади поверхности можно было бы применить формулу (4.3). Однако производная $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ не существует при $x = -4$, и формула (4.3) не применима. Для преодоления этой трудности представим данную кривую в параметрическом виде:

$$L = \left\{ (x, y) \mid x = t^2 - 4, \quad y = t, \quad t \in [0, \sqrt{6}] \right\},$$

где отрезок изменения параметра t есть область значений функции $y = \sqrt{x + 4}$, $x \in [-4, 2]$. Производные $x'(t) = 2t$ и $y'(t) = 1$ непрерывны на отрезке $[0, \sqrt{6}]$. Площадь поверхности вычислим по формуле (4.2). Получим

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} t \sqrt{4t^2 + 1} dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{8} (4t^2 + 1)' \sqrt{4t^2 + 1} dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} z = 4t^2 + 1, \quad z' = 8t \\ 0 \leq t \leq \sqrt{6} \implies 1 \leq z \leq 25 \end{array} \right| = \frac{\pi}{4} \int_1^{25} \sqrt{z} dz = \frac{62\pi}{3}. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 4.4. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $r = 10 \sin \varphi$ вокруг полярной оси.

▷ Кривая определена для тех значений угла φ , при которых выполнено неравенство $\sin \varphi \geq 0$, т. е. для $\varphi \in [0, \pi]$. Установим вид данной кривой, перейдя к декартовым координатам. Для этого сначала умножим обе части уравнения на r ; $r^2 = r \sin 2\varphi$. Теперь воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2$, получим $x^2 + y^2 = 10y$, или $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$. Таким образом, заданная кривая является окружностью с центром в точке $(0, 5)$ и радиусом 5 (см. чертеж). При изменении полярного угла φ на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$ получаются половинки окружности, лежащие в первой и второй четвертях соответственно.

В силу симметрии окружности относительно оси OY поверхность, образованная вращением вокруг полярной оси всей окружности, состоит из двух одинаковых частей, имеющих равные площади. Найдем площадь части поверхности, образованной вращением дуги L_1 окружности, лежащей в первой четверти. Дугу L_1 можно представить в виде

$$L_1 = \{(r, \varphi) \mid r = 10 \sin \varphi, \varphi \in [0, \pi/2]\},$$

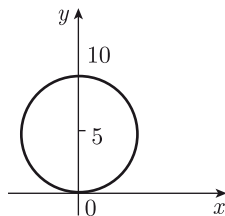


Рисунок к примеру 4.4

Она является гладкой кривой, так как функция $r'(\varphi) = 10 \cos \varphi$ непрерывна на отрезке $[0, \pi/2]$. Площадь S_1 поверхности, образованной вращением дуги L_1 , найдем по формуле (4.4):

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2\pi \int_0^{\pi/2} 10 \sin \varphi \sqrt{100 \sin^2 \varphi + 100 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi = \\
 &= 2\pi \cdot 100 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = 100\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$= 100\pi \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = 50\pi^2.$$

Наконец, найдем площадь всей поверхности: $S = 2S_1 = 100\pi^2$. $\triangleleft$

4.4. Задачи для самостоятельной работы.

Найдите площадь поверхности, образованной вращением заданной кривой вокруг указанной оси:

4.1. Ломаная ABC : $A(1, 5)$; $B(6, 2)$, $C(1, 2)$; OX .

4.2. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$; OX .

4.3. $y = \frac{\sqrt{4x-1}}{2}$, $1 \leq x \leq 9$; OX .

4.4. $y = \frac{x^3}{3}$, $0 \leq x \leq 3$; OX .

4.5. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq y \leq 1, 5$; OY

4.6. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, $1 \leq y \leq e$; OX .

4.7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; OX и OY .

4.8. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; OX .

4.9. $x = 4 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$; OX .

4.10. $r = 1 + \cos \varphi$; полярная ось.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственный интеграл и его свойства

1.1. Основные понятия и теоремы. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом b ($b > a$). Если существует предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.1)$$

то его называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (1.2)$$

Символ (1.2) также называется *несобственным интегралом*. Если предел (1.1) существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1.3)$$

Интегралы (1.2) и (1.3) называются *несобственными интегралами по неограниченному множеству*.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, интегрируема на отрезке $[a, b - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ и не ограничена в левой полукрестности точки b . Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.4)$$

называют *несобственным интегралом от неограниченной функции* и по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (1.5)$$

Если предел (1.5) существует, то несобственный интеграл (1.4) называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл по промежутку $(a, b]$.

Обозначим через w один из символов $\{b, +\infty\}$ ($b \in \mathbb{R}$) и сформулируем определение несобственного интеграла в общем случае.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, w)$ и интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, w)$. Если существует предел

$$\lim_{b \rightarrow w} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.6)$$

то его называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, w)$ и обозначают символом

$$\int_a^w f(x) dx. \quad (1.7)$$

Несобственный интеграл по промежутку $(w, b]$, где w — один из символов $\{a, -\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}$) определяется аналогично. Далее все утверждения будем формулировать для промежутка $[a, w)$. Они очевидным образом переносятся на интегралы по промежутку $(w, b]$.

Несобственные интегралы возникают в задачах на геометрические приложения интегрального исчисления: при вычислении площадей неограниченных фигур; объемов тел и площадей поверхностей вращения, если вращающаяся фигура неограничена.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна в промежутке $[a, +\infty)$. Рассмотрим фигуру

$$\Phi = \{(x, y) : a \leq x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}, \quad (1.8)$$

которую назовем *неограниченной криволинейной трапецией*.

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то площадью

фигуры Φ называется число

$$S = \int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (1.9)$$

Объем тела, образованного вращением фигуры Φ вокруг оси OX равен несобственному интегралу

$$V = \pi \int_a^{+\infty} f^2(x) dx. \quad (1.10)$$

Площадь поверхности, полученной вращением непрерывной кривой

$$L = \{(x, y) : y = f(x), f(x) \geq 0, a \leq x < +\infty\},$$

вокруг оси OX , вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^{+\infty} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (1.11)$$

Формулы (1.10), (1.11), как и формула (1.9), применимы при условии сходимости соответствующих несобственных интегралов.

При решении геометрических задач используются и несобственные интегралы от неограниченных функций.

Свойства несобственного интеграла

1. $\int_a^w (f(x) + g(x)) dx = \int_a^w f(x) dx + \int_a^w g(x) dx.$
2. $\int_a^w k f(x) dx = k \int_a^w f(x) dx,$ где $k \in \mathbb{R}.$
3. При любом $c \in [a, w)$ $\int_a^w f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^w f(x) dx.$

Свойства 1 и 2 называют линейными, а свойство 3 — аддитивностью.

Теорема 1.1 (о замене переменной в несобственном интеграле). Пусть выполнены следующие условия:

1) непрерывно дифференцируемая и строго монотонная функция $x(t)$ отображает промежуток $[\alpha, \gamma)$ в промежуток $[a, w)$, где $a = x(\alpha)$ и $x(\beta) \rightarrow w$ при $\beta \rightarrow \gamma - 0$.

2) функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, w)$. Тогда интегралы

$$\int_a^w f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\gamma f(x(t))x'(t) dt$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся. В случае сходимости справедливо равенство

$$\int_a^w f(x) dx = \int_\alpha^\gamma f(x(t))x'(t) dt. \quad (1.12)$$

Теорема 1.2 (об интегрировании по частям в несобственном интеграле). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, w]$ и существует $\lim_{x \rightarrow w} u(x)v(x)$. Тогда интегралы

$$\int_a^w u(x)v'(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^w u'(x)v(x) dx$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся. В случае сходимости справедливо равенство

$$\int_a^w u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^w - \int_a^w u'(x)v(x) dx, \quad (1.13)$$

где

$$u(x)v(x)|_a^w = \lim_{x \rightarrow w} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

1.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что если

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

сходится и $b > a$, то

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx$$

также сходится и

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

2). Докажите, что если

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

сходится, то

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

3). Найдите все значения параметра p , при которых сходится несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} dx.$$

1.3. Примеры решения задач.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

Пример 1.1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$

▷ Вычислим несобственный интеграл по определению:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = 1.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

◁

Пример 1.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

▷ По определению несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{a} - \sqrt{1}) = +\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится. $\triangleleft$

Пример 1.3. $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$

▷ По определению несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом имеем

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

Итак, интеграл сходится и равен 1. $\triangleleft$

Пример 1.4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \alpha > 0.$

▷ Интеграл является несобственным, поскольку верхний предел бесконечен. Рассмотрим два случая.

1). Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда по определению имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \\ &= \begin{cases} 1/(\alpha-1), & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2). Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln a = +\infty.$$

Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$. $\triangleleft$

Пример 1.5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\triangleright$ Данный интеграл является несобственным, поскольку подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не определена в точке $x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Итак, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$. $\triangleleft$

Пример 1.6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \alpha > 0$.

$\triangleright$ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ не ограничена в правой полуокрестности нижнего предела. Поэтому данный интеграл — несобственный. Рассмотрим два случая.

1). Пусть $\alpha \neq 1$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1 - \varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \\ &= \begin{cases} 1/(1-\alpha), & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2). Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x|_{\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

Итак, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$. $\triangleleft$

Пример 1.7. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2}.$

$\triangleright$ Применим к данному интегралу формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2}, \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \\ + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \left(-\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) - 1 = 1. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.8. $\int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

$\triangleright$ Данный интеграл является несобственным, поскольку подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ не определена в точке $x = 3$ и $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = +\infty$. Воспользуемся формулой замены переменной в несобственном интеграле. Положим $x = 3 \sin t$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{9 \sin^2 t \cdot 3 \cos t \cdot dt}{3 \cos t} = 9 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{9}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

Заметим, что в результате замены переменной несобственный интеграл преобразовался в определенный интеграл от непрерывной функции по отрезку. $\triangleleft$

Пример 1.9. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = xe^{-x}$ и прямой $y = 0$ ($x \geq 0$).

▷ Функция $f(x) = xe^{-x}$ непрерывна и неотрицательна в промежутке $[0, +\infty)$. Поэтому заданная фигура является неограниченной криволинейной трапецией вида (1.8). Площадь фигуры находится по формуле (1.9):

$$S = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx.$$

Для вычисления интеграла применим формулу (1.13) интегрирования по частям. Положим $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$. Тогда $u'(x) = 1$, $v = -e^{-x}$. Функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы в промежутке $[0, +\infty)$ и существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0.$$

По формуле (1.13) имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \\ &= -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} - e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^{-x}} - e^{-x} \right) + 1 = 1. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.10. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}$ и прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

▷ Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}$ непрерывна, неотрицательна в промежутке $(1, 2]$ и не ограничена на нем, так как $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$. Поэтому объем тела вращения выражается через несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\pi \sqrt{x-1} \Big|_1^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

Итак, $V = 2\pi$.

◁

1.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость.

$$\begin{array}{lll}
 1.1. \int_1^{+\infty} e^{-x} dx; & 1.2. \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}; & 1.3. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \\
 1.4. \int_0^{+\infty} x \sin x dx; & 1.5. \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx; & 1.6. \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}; \quad p > 0.
 \end{array}$$

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осями координат:

$$1.7. f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0; \quad 1.8. f(x) = e^{-x/3}, \quad x \geq 0.$$

Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осью OX :

$$1.9. f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x}}, \quad x \geq 0; \quad 1.10. f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$

1.11. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX графика функции $y = e^{-x}$, $x \geq 0$.

2. Исследование сходимости несобственных интегралов

2.1. Основные понятия и теоремы.

Теорема 2.1. Несобственный интеграл $\int_a^w f(x) dx$ от неотрицательной функции $f(x)$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ ограничена.

Теорема 2.2 (1-й признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, w)$, интегрируемы на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, w)$ и удовлетворяют неравенству

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ при каждом } x \in [a, w). \quad (2.1)$$

Тогда

1. Если интеграл $\int_a^w g(x) dx$ сходится, то сходится и инте-

$$\text{грал } \int_a^w f(x) dx, \text{ при этом } \int_a^w f(x) dx \leq \int_a^w g(x) dx;$$

2. Если интеграл $\int_a^w f(x) dx$ расходится, то расходится

$$\text{и интеграл } \int_a^w g(x) dx.$$

Теорема 2.3 (2-й признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, w)$, интегрируемы на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, w)$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ при каждом $x \in [a, w)$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0.$$

Тогда интегралы

$$\int_a^w f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^w g(x) dx$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Несобственный интеграл $\int_a^w f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^w |f(x)| dx.$$

Теорема 2.4 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Несобственный интеграл называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не абсолютно.

2.2. Теоретические упражнения.

1). Установите, какие из следующих интегралов сходятся и вычислите их:

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{c^2 + x^2}, \quad 2) \int_a^{+\infty} \frac{x dx}{c^2 + x^2}, \quad 3) \int_a^{+\infty} \frac{x^2 dx}{c^2 + x^2}.$$

2). Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Докажите, что если $Q_m(x) > 0$ при $x > a$, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

сходится при $n - m > 1$ и расходится в противном случае.

3). Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Докажите, что если $Q_m(x) > 0$ при $x > a$, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \sin x dx$$

абсолютно сходится при $n - m > 1$.

2.3. Примеры решения задач.

Исследовать несобственный интеграл на сходимость.

Пример 2.1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

▷ Имеем несобственный интеграл по неограниченному промежутку.

Иследуем его на сходимость по 1-му признаку сравнения. Заметим, что $\sqrt{1+x^4} \geq \sqrt{x^4} = x^2$ при $x \geq 1$. Отсюда для любого $x \in [1, +\infty)$ имеем

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Положим $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. По теореме 2.2 из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ (пример 1.4, $\alpha = 3/2$) следует, что исследуемый интеграл также сходится.

Данный интеграл можно исследовать и по 2-му признаку сравнения. Положим $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. Имеем $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ при каждом $x \in [1, +\infty)$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot x^{3/2}}{\sqrt{1+x^4}} = 1 \neq 0.$$

Отсюда по теореме 2.3 получаем, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^4}}$ сходится. $\triangleleft$

Пример 2.2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}.$

$\triangleright$ Для любого $x \geq 2$ имеем $0 < \ln x \leq x$ и, следовательно, на промежутке $x \in [2, +\infty)$ выполняется неравенство $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$.

Положив $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ и учитывая расходимость интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ (пример 1.4, $\alpha = 1$), по теореме 2.2 получаем, что

интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ также расходится. $\triangleleft$

Пример 2.3. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

$\triangleright$ Для любого $x \geq 1$ имеем $-x \geq -x^2$, и поэтому $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Отсюда, учитывая сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ (аналогичный интеграл рассмотрен в примере 1.3), по теореме 2.2 получаем, что заданный интеграл также сходится. $\triangleleft$

Пример 2.4. $\int_0^1 \frac{\sin x \, dx}{x\sqrt{x}}.$

▷ Данный интеграл исследуем по 2-му признаку сравнения. Заметим, что при $x \rightarrow +0$

$$\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Имеем $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ при каждом $x \in (0, 1]$ и

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0.$$

Поскольку интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (пример 1.6, $\alpha = 1/2$), то отсюда по теореме 2.3 получаем, что заданный интеграл также сходится. ◁

Пример 2.5. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx.$

▷ Данный интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция не ограничена в правой полуокрестности нижнего предела интегрирования. Заметим, что $\ln \sin x \sim \ln x$ при $x \rightarrow 0$. Действительно, по правилу Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = 1.$$

Чтобы применить 2-й признак сравнения, исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \ln x \, dx. \quad (2.2)$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем

$$\int_0^{\pi/2} \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2(\ln(\pi/2) - 1) - \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x - x).$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, то несобственный интеграл (2.2) сходится. Таким образом, заданный интеграл сходится по 2-му признаку сравнения. $\triangleleft$

Исследовать несобственный интеграл на абсолютную и условную сходимость.

Пример 2.6. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

$\triangleright$ Исследуем интеграл на абсолютную сходимость. При $x \geq 1$ имеем

$$|f(x)| = \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

В силу сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ отсюда по 2-му признаку

сравнения следует сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$. Таким образом, исследуемый несобственный интеграл сходится абсолютно, и, следовательно, по теореме 2.4 сходится. $\triangleleft$

Пример 2.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

$\triangleright$ 1). Сначала исследуем интеграл на сходимость. Применим к нему формулу (1.13) интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad u' = -\frac{1}{x^2} \\ v' = \sin x, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} + \cos 1 \right) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = 0 + \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2}$ (пример 2.6)

получаем, что исследуемый интеграл также сходится.

2). Теперь исследуем интеграл на абсолютную сходимость. При любом $x \in \mathbb{R}$ имеем $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Тогда для каждого $a > 1$ получаем

$$\int_1^a \left| \frac{\sin x \, dx}{x} \right| = \int_1^a \frac{|\sin x| \, dx}{x} \geq \frac{1}{2} \int_1^a \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^a \frac{\cos 2x \, dx}{x}. \quad (2.3)$$

Заметим, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = +\infty$. Докажем, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\cos 2x \, dx}{x}$

существует, т. е. интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x}$ сходится. Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x} &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad u' = -\frac{1}{x^2} \\ v' = \cos 2x, \quad v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sin 2x}{2x} \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x \, dx}{x^2} = \frac{\sin 2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x \, dx}{x^2}. \end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x \, dx}{x^2}$ (исследование анало-

гично примеру 2.6) получаем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x}$ сходится.

Отсюда с учетом оценки (2.3) получаем, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx =$

$= +\infty$. А это означает, что исследуемый исходный интеграл не является абсолютно сходящимся. Таким образом, данный интеграл сходится условно. $\triangleleft$

2.4. Задачи для самостоятельной работы.

Исследуйте несобственные интегралы на сходимость.

$$2.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^{13} dx}{(x^5 + x + 1)^3}; \quad 2.2. \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt[3]{1 + x^4}};$$

$$2.3. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}; \quad 2.4. \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$2.5. \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx; \quad 2.6. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \quad 2.7. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1};$$

$$2.8. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}; \quad 2.9. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}}.$$

Исследуйте несобственные интегралы на абсолютную и условную сходимость.

$$2.10. \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx; \quad 2.11. \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx;$$

$$2.12. \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad 2.13. \int_0^{+\infty} x \cos(x^4) dx.$$

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями

3.1. Основные понятия и теоремы. В двух предыдущих параграфах говорилось о несобственных интегралах с одной особенностью, связанной с неограниченностью функции в окрестности одного из пределов интегрирования или с бесконечностью самого предела интегрирования.

Если интеграл имеет особенности на обоих концах промежутка интегрирования, то полагают по определению

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x) dx = \int_{w_1}^c f(x) dx + \int_c^{w_2} f(x) dx, \quad (3.1)$$

где c — произвольная точка из промежутка (w_1, w_2) .

При этом несобственный интеграл, стоящий в левой части (3.1), называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства. В противном случае он называется расходящимся.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке w промежутка интегрирования (α, β) , то по определению полагают

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^w f(x) dx + \int_w^{\beta} f(x) dx. \quad (3.2)$$

При этом, несобственный интеграл, стоящий в левой части (3.2), называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части; иначе, он называется расходящимся.

3.2. Теоретические упражнения.

1). Докажите, что если функция $f(x)$ является четной и $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

2). Докажите, что если функция $f(x)$ является нечетной и $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

3). Исследуйте сходимость интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

4). Определите, при каких значениях параметров p и q сходится интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p(b-x)^q}.$$

3.3. Примеры решения задач.

Исследовать сходимость несобственного интеграла с несколькими особенностями.

Пример 3.1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0.$

▷ Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ имеет две особенности: в точке $x = 0$ подынтегральная функция не определена и не ограничена в окрестности этой точки, а верхний предел интегрирования бесконечен. Поскольку при любом $\alpha > 0$ расходится по крайней мере один из двух интегралов $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ или $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (примеры 1.6, 1.4), то, согласно (3.1), исследуемый интеграл также расходится. ◁

Пример 3.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

▷ Интеграл имеет две особенности: подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не определена в точках $x = -1$ и $x = 1$ и не

ограничена в окрестности каждой из них. Применим определение и формулу (3.2):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \arcsin x|_{-1}^0 + \arcsin x|_0^1 = \pi/2 + \pi/2 = \pi. \end{aligned}$$

Следовательно, заданный интеграл сходится и равен π . ◁

Пример 3.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$.

▷ Интеграл имеет две особенности: верхний предел бесконечен, а в окрестности нижнего предела подынтегральная функция не ограничена. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx.$$

Исследуем оба полученных интеграла на сходимость.

1). Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx$. Применим к нему

2-й признак сравнения. Выберем интеграл для сравнения. При $\lim_{x \rightarrow +0} x \rightarrow +0 \quad \arctg x \sim x$, и поэтому

$$\frac{\arctg x}{x^\alpha} \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Отсюда следует, что в качестве интеграла для сравнения можно

взять $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$. Этот интеграл сходится при $0 < \alpha - 1 < 1$, т. е.

при $0 < \alpha < 2$, и расходится при $\alpha \geq 2$. Отсюда по теореме

2.3 следует, что $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx$ ведет себя также: сходится при

$1 < \alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$.

2). Исследуем интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} : \frac{1}{x^\alpha} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2.$$

Поэтому в качестве интеграла для сравнения выберем $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$,

который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Окончательно имеем: значения α , при которых сходятся оба интеграла из правой части (3.3), удовлетворяют неравенству

$1 < \alpha < 2$. При $0 < \alpha \leq 1$ расходится $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$, а при $\alpha > 1$ расходится $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$. Таким образом, $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$ сходится при $1 < \alpha < 2$. $\triangleleft$

3.4. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}; & 3.2. \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; & 3.3. \quad & \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx; \\ 3.4. \quad & \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}; & 3.5. \quad & \int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx; & 3.6. \quad & \int_{-\infty}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx. \end{aligned}$$

Исследуйте несобственные интегралы на сходимость.

$$3.7. \quad \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}; \quad 3.8. \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}; \quad 3.9. \quad \int_0^2 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Неопределенный интеграл

1.1. $\frac{x^2}{3^x} - 2e^x$. о Метод разложения; (II) с $\alpha = 1$ и (V).

1.2. $\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{25^x \ln 25}$. о Метод разложения; (IV) с $a = 3$ и $a = \frac{1}{25}$.

1.3. $-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} + \frac{2}{3}x$. о Метод разложения; (II) с $\alpha = -3$, $\alpha = -2$ и $\alpha = 0$.

1.4. $-\cos x + \frac{2x\sqrt{x}}{3}$. о Метод разложения; (VI), (II) с $\alpha = \frac{1}{2}$.

1.5. $-\operatorname{ctg} x + \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sin x$. о Метод разложения; (IX), (II) с $\alpha = -\frac{1}{3}$; (VII).

1.6. $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} x$. о Вынесите коэффициент 5 за скобки в знаменателе; (X).

1.7. $\frac{1}{3} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{7}{9}} \right)$. о Вынесите коэффициент 3 из-под знака корня; (XII)
с $\alpha = \frac{7}{9}$.

1.8. $x^3 - \frac{x^2}{2} - 4x$. о Раскройте скобки и используйте метод разложения.

1.9. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + 5 \arcsin x$. о Метод разложения; (II) с $\alpha = \frac{4}{3}$; (XI).

1.10. $\frac{2}{7\sqrt{3}}t^{7/2} + \frac{2}{5\sqrt{3}}t^{5/2}$. о Разделите почленно числитель на знаменатель;
метод разложения; (II) с $\alpha = \frac{5}{2}$ и $\alpha = \frac{3}{2}$.

1.11. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. о Разделите почленно числитель на знаменатель; (X) и (XII) с $\alpha = 1$.

1.12. $-\operatorname{ctg} x + \cos x$. о Разделите почленно; (IX) и (VI).

1.13. $2x - 2 \operatorname{arctg} x + \frac{5}{7}x^{7/5}$. о Выделите целую часть рациональной дроби
и используйте метод разложения; (X) и (II) с $a = \frac{2}{5}$.

1.14. $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{5^x}{3^x(\ln 5 - \ln 3)}$. о Преобразовав выражение $(x + 1) = (\sqrt[3]{x})^3 + 1$ по формуле суммы кубов, сократите дробь. Метод разложения; (II) с $\alpha = 1$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, (IV) с $a = \frac{5}{3}$.

1.15. $\arcsin x + 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. о Разделите почленно числитель на знаменатель и разложите $1 - x^4$ по формуле разности квадратов. Примените метод разложения; (XI) и (XII).

- 1.16.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x$. $\circ$ Воспользуйтесь формулой понижения степени: $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$; (II) с $\alpha = 0$; (VII).
- 2.1.** $\frac{1}{11}(x+3)^{11}$. $\circ$ Замена переменной $t = x + 3$.
- 2.2.** $-\frac{2}{3}(10-x)^{3/2}$. $\circ$ Замена переменной $t = 10 - x$.
- 2.3.** $-\frac{1}{3}\cos(3x+1)$. $\circ$ Замена переменной $t = 3x + 1$.
- 2.4.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$. $\circ$ Замена переменной $t = x^2 + 3$.
- 2.5.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. $\circ$ Замена переменной $t = \operatorname{arctg} x$.
- 2.6.** $\frac{1}{2}e^{x^2}$. $\circ$ Замена переменной $t = x^2$.
- 2.7.** $\frac{1}{4}\sin^4 x$. $\circ$ Замена переменной $t = \sin x$.
- 2.8.** $-\sqrt{9-x^2}$. $\circ$ Замена переменной $t = 9 - x^2$.
- 2.9.** $\frac{1}{4}\ln^4 x$. $\circ$ Замена переменной $t = \ln x$.
- 2.10.** $\frac{2}{9}(x^3-7)^{3/2}$. $\circ$ Замена переменной $t = x^3 - 7$.
- 2.11.** $2\sin\sqrt{x}$. $\circ$ Замена переменной $t = \sqrt{x}$.
- 2.12.** $-\sin\frac{1}{x}$. $\circ$ Замена переменной $t = \frac{1}{x}$.
- 2.13.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin x - \sqrt{2}}{\sin x + \sqrt{2}}\right|$. $\circ$ Замена переменной $t = \sin x$.
- 2.14.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3}$. $\circ$ Замена переменной $t = x^2$.
- 2.15.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6 + 7}\right|$. $\circ$ Замена переменной $t = x^3$.
- 2.25.** $\frac{1}{3}x^3 - 6x + 6\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}}$. $\circ$ Выделите целую часть дроби.
- 2.26.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|$. $\circ$ Воспользуйтесь равенством:

$$\frac{1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1,5} - \frac{1}{x+1}\right).$$
- 2.27.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|$. $\circ$ Воспользуйтесь равенством:

$$\frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right).$$
- 2.28.** $\frac{1}{4}\ln(4x^2+4x+5) - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)$. $\circ$ В числителе выделите производную знаменателя.
- 2.29.** $\frac{1}{3}\arcsin\left(x + \frac{1}{3}\right)$. $\circ$ В квадратном трехчлене выделите полный квадрат. Замена переменной $t = x + \frac{1}{3}$.
- 2.30.** $2\sqrt{4x-3+x^2} - \ln(x+2+\sqrt{4x-3+x^2})$. $\circ$ В числителе выделите производную квадратного трехчлена.
- 2.31.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{18}\sin 9x$. $\circ$ Воспользуйтесь формулой понижения степени: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

- 2.32.** $-\frac{2}{3}(1 - e^x)\sqrt{1 - e^x}$. о Замена переменной $t = 1 - e^x$.
- 2.33.** $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x+3)^5} - \frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x+3)^2}$. о Замена переменной $t = \sqrt[3]{2x+3}$.
- 2.34.** $-\frac{1}{13}\cos 6,5x - \frac{1}{19}\cos 9,5x$. о Примените формулу преобразования произведения в сумму: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$.
- 2.16.** $-\ln |\cos x|$. о Замена переменной $t = \cos x$.
- 2.17.** $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{2}\ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right|$. о Метод разложения.
- 2.18.** $\frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x}$. о Метод разложения.
- 2.19.** $-\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x$. о Замена переменной $t = \sin x$.
- 2.20.** $\frac{1}{2}\arctg x^2 - \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1)$. о Замена переменной $t = x^2$.
- 2.21.** $-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x} + 1)$. о Воспользуйтесь равенством $\frac{1}{e^x + 2} = \frac{e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$. Замена переменной $t = e^{-x}$.
- 2.22.** $\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x + \sqrt{1 + 4^x})$. о Замена переменной $t = 2^x$.
- 2.23.** $2\arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$. о Умножьте числитель и знаменатель на $\sqrt{2 - x}$.
- 2.24.** $-\arcsin \frac{1}{x}$. о Замена переменной $t = \frac{1}{x}$.
- 2.35.** $\frac{2}{5}\sqrt{(4+x)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(4+x)^3}$. о Замена переменной $t = \sqrt{4+x}$.
- 2.36.** $\ln \left| \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1} \right|$. о Замена переменной $t = \sqrt{3x+1}$.
- 2.37.** $\ln \left(\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}} \right)$. о Замена переменной $t = \frac{1}{x}$.
- 2.38.** $\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4}\ln(x^2+x+0,5) + \frac{1}{2}\arctg(2x+1)$. о Выделите целую часть дроби.
- 2.39.** $\frac{1}{6}\ln \left| e^{3x} - 3e^x + 2 \right| - \frac{x}{2}$. о Воспользуйтесь равенством $\frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 2} \right)$.
- 2.40.** $x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$. о Вынесите из-под корня в знаменателе e^{-x} .
- 2.41.** $-2 \left(\sqrt[4]{5-x} \right)^2 - 4\ln \left(1 + \sqrt[4]{5-x} \right)$. о Замена $t = \sqrt[4]{5-x}$.
- 2.42.** $-\frac{1}{3}\cos^6 x$. о Замена переменной $t = \cos x$.
- 2.43.** $\frac{1}{4}\ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg}(x/2)}{2 - \operatorname{tg}(x/2)} \right|$. о Замена переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
- 2.44.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}$. о Замена переменной $t = \sqrt[3]{x}$.
- 3.1.** $(x-1)e^x$; $u = x$, $v' = e^x$.
- 3.2.** $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$; $u = \ln x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- 3.3.** $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; $u = \arcsin x$, $v' = 1$.
- 3.4.** $x \ln(2-x) - x - 2 \ln|x-2|$; $u = \ln(2-x)$, $v' = 1$.
- 3.5.** $-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$; $u = x$, $v' = e^{-2x}$.
- 3.6.** $x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2)$; $u = \operatorname{arctg} 3x$, $v' = 1$.
- 3.7.** $\frac{x}{2} \sin(2x-4) + \frac{1}{4} \cos(2x-4)$; $u = x$, $v' = \cos(2x-4)$.
- 3.8.** $\frac{3x+1}{\ln 4} 4^x - \frac{3}{\ln^2 4} 4^x$; $u = 3x+1$, $v' = 4^x$.
- 3.9.** $-\frac{x^2}{3} \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x$. $\circ$ Дважды по частям: 1-й раз $u = x^2$, $v' = \sin 3x$, затем $u = x$, $v' = \cos 3x$.
- 3.10.** $\left(x - \frac{1}{3} x^3\right) \ln x - x + \frac{1}{9} x^3$; $u = \ln x$, $v' = 1 - x^2$.
- 3.11.** $-\frac{1}{x} \arccos x + \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right|$; $u = \arccos x$, $v' = x^{-2}$.
- 3.12.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. $\circ$ Замена переменной $t = \sqrt{x}$, затем проинтегрируйте по частям.
- 3.13.** $-\frac{1}{x} \left(\ln^2 x + 2 \ln x + 2 \right)$. $\circ$ Дважды по частям: 1-й раз $u = \ln^2 x$, $v' = \frac{1}{x^2}$.
- 3.14.** $\frac{x^3}{6} - \frac{1}{8} (2x^2 - 1) \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$. $\circ$ Примените формулу понижения степени: $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$; дважды проинтегрируйте по частям.
- 3.15.** $-\sqrt{x+1} + (2+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x+1}$. $\circ$ Замена переменной $t = \sqrt{x+1}$, затем по частям.
- 3.16.** $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|$; $u = x$, $v' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
- 3.17.** $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$. $\circ$ Дважды по частям: 1-й раз $u = \cos(\ln x)$, $v' = 1$, 2-й раз $u = \sin(\ln x)$, $v' = 1$; решите уравнение относительно искомого интеграла.
- 3.18.** $-\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$; $u = -\frac{1}{\sin x}$, $v' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- 3.19.** $-\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2+1} - \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \right)$. $\circ$ Проинтегрируйте по частям, полагая $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; составьте и решите уравнение относительно искомого интеграла.

2. Определенный интеграл

- 1.1.** $\frac{1}{16} (\pi^2 + 24 - 4\sqrt{2})$. **1.2.** $-\frac{5\pi}{4} + \frac{2}{\ln 3}$. **1.3.** $\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\pi}{2}$. $\circ$ Разделите почленно числитель на знаменатель.
- 1.4.** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. $\circ$ Вынесите коэффициент $\sqrt{3}$ из-под корня.
- 1.5.** $\frac{1}{4} (\pi + 2)$. $\circ$ Воспользуйтесь формулой $\cos^2(\varphi/2) = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$.
- 1.6.** $1 - \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
- 1.7.** $\frac{1}{3} (14 - 2\sqrt{5})$. $\circ$ Умножьте числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю.

1.8. $4\sqrt{3}/3$. $\circ$ Воспользуйтесь формулой $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и разделите почленно числитель на знаменатель.

1.9. 4. $\circ$ Используйте аддитивность и определение модуля.

1.10. 0. $\circ$ Интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку.

2.1. $\frac{1}{2} \ln \frac{11}{6}$; $t = x^2 + 2x + 3$. **2.2.** $-\frac{1}{6} \ln 2$; $t = \cos 3x$.

2.3. $\frac{\pi^2}{24}$; $t = \arcsin x$. **2.4.** $\frac{1}{4} \ln \frac{9}{8}$; $t = x^4 + 8$. **2.5.** $\frac{2}{3}$; $t = x^3$.

2.6. $\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{3} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \right)$; $x = \operatorname{arctg} t$.

2.7. $\frac{1}{4}$; $t = x^2 + 1$.

2.8. $\ln \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} \right)$; $t = \ln x$.

2.9. $\frac{(e-1)^2}{2}$; $t = e^x$.

2.10. $2 \left(\ln 2 + \frac{7}{2} \right)$; $t = \sqrt{x} - 1$.

2.11. $\frac{1}{e} - 1$; $t = -\cos x$.

2.12. $\frac{2}{\pi}$; $t = \sqrt{x}$.

2.13. $\frac{\pi}{6}$. $\circ$ Выделите полный квадрат в подкоренном выражении; $t = x - 1$.

2.14. $\frac{1}{8} \ln \frac{5}{3}$. $\circ$ Выделите полный квадрат в знаменателе; $t = x + 1$.

2.15. $\frac{8}{315}$; $t = \cos x$.

2.16. $\frac{4}{3}$. $\circ$ Свойство 8; $t = \cos x$.

2.17. $\frac{9\pi}{4}$; $x = 3 \sin t$.

2.18. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{5(1+\sqrt{2})}{\sqrt{26}-1}$; $t = \frac{1}{x+1}$.

2.19. $\frac{\pi}{3} - 2 + \sqrt{3}$. $\circ$ Воспользуйтесь равенством $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.20. $-\frac{1}{8\sqrt[3]{3}}$; $t = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$.

3.1. $\pi (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) / 24 + (1 - \sqrt{2}) / 2$. $\circ u = x$, $v' = \cos x$.

3.2. 1; $u = \arccos x$, $v' = 1$.

3.3. $(1 - \ln 2) / 2$. $\circ u = x$, $v' = e^{-x}$.

3.4. $\frac{\pi}{4}$. $\circ u = \varphi$, $v' = \sin 2\varphi$.

3.5. $\frac{e}{2}$. $\circ u = 2x + 1$, $v' = e^{2x}$.

3.6. $\frac{1}{4} \pi \sqrt{2} + \ln (\sqrt{2} - 1)$. $\circ u = \operatorname{arctg} x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3.7. $2 - \frac{3}{4 \ln 2}$. $\circ$ Используйте равенство $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$; $u = \ln x$, $v' = x$.

3.8. $3e \ln 2$. $\circ u = \ln 2x$, $v' = 1$.

3.9. $\frac{3}{4} - 2 \ln 2$. $\circ u = \ln x$, $v' = \frac{1}{x^3}$.

- 3.10.** $(e-1)\ln(e^2-2e+2) - \ln 2 - 2\left(e-2 - \arctg(e-1) + \frac{\pi}{4}\right)$. $\circ u = \ln(x^2+1)$, $v' = 1$.
- 3.11.** $\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$; $u = x$, $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- 3.12.** $\frac{3}{\sqrt{2}} \sin(\ln 3 - \pi/4) - \sqrt{2} \sin\left(\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)$. $\circ$ Дважды проинтегрируйте по частям и решите уравнение относительно искомого интеграла; воспользуйтесь формулой $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \pi/4)$.
- 3.13.** $(\sqrt{3}+1) \arctg \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} - \frac{\pi}{2} + 1$. $\circ u = \arctg \sqrt{x}$, $v' = 1$; в новом интеграле сделайте замену переменной $t = \sqrt{x}$.
- 3.14.** $\frac{5e^2-9}{8e}$. $\circ$ Дважды проинтегрируйте по частям.
- 3.15.** $\frac{\pi+3}{4} - \frac{\pi^2}{32}$. $\circ$ Дважды проинтегрируйте по частям.
- 3.16.** $-\frac{3}{34}(e^{3\pi/5}+1)$. $\circ$ Дважды проинтегрируйте по частям и решите уравнение относительно искомого интеграла.
- 3.17.** $\frac{\pi}{24} - \ln(\sqrt{6}-\sqrt{3})$. $\circ u = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{x^2}$; в новом интеграле сделайте замену переменной $t = \frac{1}{x}$.
- 3.18.** $2\frac{e-1}{e}$. $\circ$ Разбейте интеграл на сумму интегралов по отрезкам знакопостоянства подынтегральной функции.
- 3.19.** $\pi - 2$. $\circ$ Дважды проинтегрируйте по частям и решите уравнение относительно искомого интеграла.

3. Приложения определенного интеграла

- 1.1.** 1. $\circ$ Примените формулу (1.2), x — переменная интегрирования.
- 1.2.** $\frac{1}{2}(e^4 - e^2)$. $\circ$ (1.2), x — переменная интегрирования.
- 1.3.** $\frac{16}{3}\sqrt{2}$. $\circ$ Используйте симметрию относительно OX ; (1.2), x — переменная интегрирования.
- 1.4.** 12. $\circ$ (1.2), y — переменная интегрирования.
- 1.5.** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. $\circ$ (1.1), x — переменная интегрирования.
- 1.6.** $\frac{3}{4} - \ln 2$. $\circ$ (1.1), x — переменная интегрирования.
- 1.7.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2$. $\circ$ (1.1), x — переменная интегрирования.
- 1.8.** $\frac{450}{3}$. $\circ$ (1.1), y — переменная интегрирования.
- 1.9.** $\frac{1}{2}(3\ln 2 + \sqrt{2} - 3)$. $\circ$ Разбейте отрезок $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ на 2 части с учетом неравенств $\operatorname{ctg} x > \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\operatorname{ctg} x < \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- 1.10.** πab . $\circ$ Используйте симметрию относительно OX и OY .
- 1.11.** $\frac{\pi}{2} + 1$. $\circ$ Воспользуйтесь тождеством $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$.

1.12. 32. о Используйте симметрию относительно OY ; разбейте отрезок на части в зависимости от знака двучлена $4 - x^2$.

1.13. $11 - 6 \ln 3$. о Разбейте отрезок на части в зависимости от знака двучленов $x + 1$ и $2 - x$.

1.14. $\frac{1}{4} \pi a^2$. о Используйте метод примера 1.5.

1.15. 6π . о Используйте метод примера 1.5.

1.16. $2\pi + \frac{4}{3}$ и $6\pi - \frac{4}{3}$. о Используйте симметрию относительно OY .

2.1. $\frac{\pi^2}{2}$.

2.2. $\frac{\pi}{4} (e^2 - e^{-2} + 4)$. о Используйте симметрию тела относительно YOZ .

2.3. 12π .

2.4. $\frac{3\pi^2}{2}$. о Примените формулу (2.1) и используйте симметрию тела относительно YOZ .

2.5. $\frac{98\pi}{15}$.

2.6. $\frac{512\pi}{15}$. о Примените формулу (2.1), y — переменная интегрирования.

2.7. $\frac{320\pi}{3}$ и $\frac{400\pi}{3}$.

2.8. $\frac{8\pi}{3}$. о Примените формулу (2.1), y — переменная интегрирования.

2.9. $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$.

2.10. $\frac{2048\pi}{35}$. о (2.1), y — переменная интегрирования.

2.11. $\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$.

2.12. $\pi (3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 + 4)$. о (2.2), y — переменная интегрирования.

2.13. $\frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + rR)$. о Рассмотрите тело, образованное вращением вокруг OX фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $x = H$, $y = \frac{R-r}{H}x + r$.

2.14. 24π . о Рассмотрите тело, образованное вращением вокруг OX фигуры, ограниченной линиями $x = -2$, $x = 1$, $y = \sqrt{9 - x^2}$.

2.15. $16R^3/3$. о Рассмотрите сечения, образованные плоскостями, параллельными осям обоих цилиндров. **3.1.** $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. о (3.4); в интеграле подстановка $t = \sqrt{x^2 + 1}$.

3.2. $e - \frac{1}{e}$.

3.3. $\frac{232}{15}$. о (3.4); в интеграле подстановка $t = \sqrt{x} + 1$.

3.4. $3 + \frac{1}{2} \ln 2$.

3.5. $\frac{14}{3}$. о (3.4), y — переменная интегрирования.

3.6. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. о (3.4); в интеграле подстановка $t = \sqrt{e^{2x} + 1}$.

3.7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3.8. $\ln 3$. $\circ$ (3.4); в интеграле подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

3.9. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$.

3.10. $\frac{25}{3}$.

3.11. 24. $\circ$ (3.4), воспользуйтесь тождеством $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$.

3.12. $5 \left(\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) \right)$. $\circ$ (3.6), (XVII).

3.13. $\frac{134}{27}$. $\circ$ (3.4), y — переменная интегрирования; используйте симметрию кривой относительно OY .

3.14. $\sqrt{6} + \ln \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right)$. $\circ$ Используйте симметрию кривой относительно OY ; (XVII).

3.15. $\frac{3\pi}{2}$. $\circ$ (3.6), используйте симметрию кривой относительно осей OX и OY .

3.16. $\sqrt{2} + \ln \left(1 + \sqrt{2} \right)$. $\circ$ Используйте симметрию кривой относительно полярной оси; для вычисления интеграла примените метод примера 3.7, гл. 1.

3.17. $10 \left(\frac{67}{27} + \sqrt{5} \right)$.

3.18. $3 \left(2 + \sqrt{2} + \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \right)$. $\circ$ Используйте симметрию кривой относительно OY ; (XVII).

4.1. $\pi \left(20 + 7\sqrt{34} \right)$. $\circ$ Примените (4.3), $y = -\frac{3}{5}x + \frac{28}{5}$ — уравнение прямой AB .

4.2. $\frac{\pi}{4} \left(e^2 - e^{-2} + 4 \right)$. $\circ$ Примените (4.3).

4.3. $\frac{104\pi}{3}$. $\circ$ Примените (4.3).

4.4. $\frac{\pi}{9} \left(82\sqrt{82} - 1 \right)$. $\circ$ Примените (4.3).

4.5. $\frac{14\pi}{3}$. $\circ$ Задайте кривую параметрически: $y = t$, $x = \frac{t^2}{2}$, $t \in [0, \sqrt{3}]$ и примените (4.2).

4.6. $\frac{\pi}{3} \left(e^2 + 3e - 4 \right)$. $\circ$ Задайте кривую параметрически:

$x = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2} \ln t$, $y = t$, $t \in [1, e]$ и примените (4.2).

4.7. 1) $8\pi \left(4 + \frac{25}{3} \arcsin \frac{3}{5} \right)$. $\circ$ Примените (4.2), используйте симметрию кривой относительно координатных осей, в интеграле сделайте подстановку $\cos t = \frac{5}{3} \sin \varphi$;

2) $10\pi \left(5 + \frac{16}{3} \ln 2 \right)$. $\circ$ Примените (4.2) и (XVII).

4.8. $\pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} \right) + \pi \ln \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{5} + 1}$. $\circ$ Примените (4.3), в интеграле сделайте

подстановку $1 + \frac{1}{\cos^4 x} = z^2$.

4.9. $\frac{192\pi}{5}$. о Примените (4.2).

4.10. $\frac{32\pi}{5}$. о Используйте симметрию кривой относительно полярной оси, примените (4.4), в интеграле сделайте подстановку $t = \cos \varphi$.

4. Несобственные интегралы

1.1. e . **1.2.** Расходится. **1.3.** $1 - \ln 2$. **1.4.** Расходится. **1.5.** Расходится. **1.6.** $(b-1)^{1-p}/(1-p)$ при $0 < p < 1$, расх. при $p \geq 1$. **1.7.** $\pi/2$. **1.8.** 3. **1.9.** 2π . **1.10.** $\pi/4$. **1.11.** $\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

2.1. Сходится. **2.2.** Расходится. **2.3.** Расходится. **2.4.** Сходится. **2.5.** Сходится. **2.6.** Сходится. **2.7.** Сходится. **2.8.** Расходится. **2.9.** Расходится. **2.10.** Сходится абсолютно. **2.11.** Сходится условно. **2.12.** Сходится условно. **2.13.** Сходится условно.

3.1. Расходится. **3.2.** π . **3.3.** $10/7$. **3.4.** Расходится. **3.5.** $6 - 9 \ln 3/2$. **3.6.** -1 . **3.7.** Расходится. **3.8.** Сходится.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольная работа по теме: «Неопределенный интеграл»

Найдите неопределенные интегралы:

Вариант I.

1. $\int \frac{x \, dx}{1 + 4x^2}$

2. $\int \frac{dx}{7x^2 - 8}$

3. $\int \frac{8^x - 1}{2^x - 1} \, dx$

4. $\int \sin 3x \cos x \, dx$

5. $\int x \cos 4x \, dx$

6. $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x} + 2}} \, dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x+6}}{x-1} \, dx$

8. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

Вариант II.

1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x} \, dx}{1 + 4x^2}$

2. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5}$

3. $\int \frac{3\sqrt{x} + 1}{x} \, dx$

4. $\int \cos x \cos 4x \, dx$

5. $\int x \cdot 3^x \, dx$

7. $\int x(2x + 3)^{12} \, dx$

8. $\int \frac{dx}{3 - \sqrt{x-4}}$

9. $\int \cos^4 x \, dx$

Вариант III.

1. $\int \frac{dx}{x (\ln x)^3}$

2. $\int \frac{dx}{7 - 5x^2}$

3. $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{2^x \cdot 3^x} \, dx$

4. $\int \sin^2 3x \, dx$

5. $\int x \operatorname{arctg} 2x \, dx$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} \, dx$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

8. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \, dx$

Вариант IV.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x^2}}$

2. $\int \frac{3}{2 + 3x^2} \, dx$

3. $\int e^x \sqrt{3 - 4e^x} \, dx$

4. $\int \sin^3 6x \cos 6x \, dx$

Вариант V.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 8x^2}}$

2. $\int \frac{x^2}{1 + x^6} \, dx$

3. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} \, dx$

4. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x) \, dx$

Вариант VI.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 8x^2}}$

2. $\int \frac{x}{2x^2 + 3} \, dx$

3. $\int \frac{2 \cdot 5^x - 1}{\sqrt{2 \cdot 5^x + 1}} \, dx$

4. $\int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} \, dx$

5. $\int \arccos 3x \, dx$

5. $\int \operatorname{arctg} 3x \, dx$

5. $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$

6. $\int \frac{dx}{5-\sqrt{x}}$

6. $\int \frac{\sqrt{2x-7}}{x+1} \, dx$

7. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

7. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 6 \sin x}$

7. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

8. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx$

8. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$

8. $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} \, dx$

**2. Контрольная работа по разделу:
«Интегральное исчисление функций
одной переменной»**

Вариант I.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 + 5x}{x+3} \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx; \quad b) \int_0^3 x \sqrt{9+x^2} \, dx; \quad c) \int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} \, dx.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x + 1, \quad y = \cos x, \quad y = 0 \quad (y \geq 0).$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$y = \sqrt{x+3}, \quad -3 \leq x \leq 6.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}.$$

Вариант II.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}; \quad b) \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx; \quad c) \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \, dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2 + 8, \quad y = x^2.$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = 2 - e^x, \quad \frac{1}{2} \ln 3 \leq x \leq \frac{1}{2} \ln 8.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \, dx.$$

Вариант III.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \left(e^{x/2} + e^{-x/2} \right)^2 \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{x^2-1} \, dx; \quad b) \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx; \quad c) \int_1^2 \ln^2 x \, dx.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$y^2 = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}.$$

Вариант IV.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-9} dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad b) \int_{-1}^1 x \cdot 2^x dx; \quad c) \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2 - \frac{x^2}{2}, \quad x + y = 2.$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx.$$

Вариант V.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \sin x \cos 3x dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad b) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx; \quad c) \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 1 - (x - 1)^2, \quad y = -x.$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$y = \cos \frac{x}{4}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx.$$

Вариант VI.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{3x}{x^2 - 5x + 6} \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-x^2} \, dx; \quad b) \int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} \, dx; \quad c) \int_{-1/4}^{1/4} \arccos 2x \, dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin 2x, \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вариант VII.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{4 + \sqrt{x}}.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}; \quad b) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}; \quad c) \int_1^2 \ln^2(3x + 2) dx.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$y = \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Вариант VIII.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{-2/3}^{-1/3} \frac{x dx}{e^{3x}}; \quad b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad c) \int_1^{\sqrt{2}} x \operatorname{ctg}(x^2 + 1) dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x(3 - x), \quad y = x.$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = \ln(x + 1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Вариант IX.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \cos^5 x \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_4^5 \frac{dx}{x^2 + x - 2}; \quad b) \int_0^{\pi/2} (x + 3) \sin x \, dx; \quad c) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin 2x}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$xy = 6, \quad x + y - 7 = 0.$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$x = \cos t - 3, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 1].$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость.

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Вариант X.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2}} \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}}; \quad b) \int_0^1 x(2-x^2) \, dx; \quad c) \int_{1/\sqrt{3}}^1 x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 1 - x^2, \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1 \quad (x \geq 0).$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Вариант XI.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int x \arcsin 3x \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}; \quad b) \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx; \quad c) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^{-2x}, \quad y = e, \quad x = \frac{1}{2}.$$

4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость.

$$\int_0^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Вариант XII.

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} \, dx.$$

2. Вычислите интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{x \, dx}{(1+x^2)^3}; \quad b) \int_0^3 \ln(x+2) \, dx; \quad c) \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \, dx.$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y.$$

4. Найдите длину кривой:

$$y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^e \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Список литературы

Учебники

1. Берс Л. Математический анализ. Т. I. — М.: Высшая школа, 1975.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Т. I. — М.: МЦНМО, 2002.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2002.
4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. — М.: Физматлит, 2002.
5. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. — М.: Советская наука, 1952.
6. Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Физматлит, 2001.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II. — М.: Физматлит, 2006.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. — СПб.: Лань, 2002.

Учебные пособия и сборники задач

9. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2002.
10. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2001.
11. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу // Предел. Непрерывность. Производная. — М.: Физматлит, 2003.
12. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. — М.: Физматлит, 2003.
13. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. — М.: Наука, 1970.
14. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — СПб.: Лань, 2005.
15. Демидович Б. Ф. Сборник задач и упражнений по математическому анализу (для вузов). — М.: АСТ, 2003.
16. Мордкович А. Г., Мухин А. Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному интегральному исчислению функций одной переменной. — М.: Просвещение, 1985.